Classification des courbes algébrique de degré deux

par Richard Gomez

Août 2005, revu en octobre 2010

richardetdave@aol.com

Résumé

Le but de cet article est d'étudier les courbes algébriques de degré deux en suvant la méthode du cours de Mikhail Postnikov [6]. Cette méthode est à la portée des lycéens puisqu'elle n'utilise pas le théorème de réduction des formes bilinéaires. On donne la classification des courbes de degré deux dans les cas complexe et réel-complexe. On démontre en particulier que les seules courbes réelles de degré deux sont les coniques et les paires de droites. On termine en donnant la classification des courbes projectives de degré deux. Nous expliquons en annexe ce que sont les espaces projectifs de manière élémentaire.

Prérequis. Conique, ellipse, hyperbole, parabole, espace vectoriel, écriture matricielle des changements de repère en dimension deux et trois, espace affine, espace euclidien.

Remerciements. Je remercie Dany-Jack Mercier pour avoir mis en ligne cet article sur MégaMaths.

1 Introduction

Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de deux et $\mathcal{P}$ un plan affine sur $\mathbb{K}$. Fixons un repère (O, e_1, e_2) dans $\mathcal{P}$. Alors toute fonction $F\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ définit une partie

$$\mathcal{C} = \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{P}; F(x, y) = 0 \right\}$$

du plan. On dit que $\mathcal{C}$ est une *courbe de $\mathcal{P}$ d'équation $F(x, y) = 0$ dans le repère (O, e_1, e_2)*.

Si $F(x, y)$ est un polynome en x et y, on dit que l'équation est *algébrique* et que $\mathcal{C}$ est une *courbe algébrique*.

Définition 1. *Une courbe algébrique est une partie du plan affine définie par une équation polynomiale dans un repère.*

Une courbe n'a pas une équation unique. Si

$$F(x, y) = 0$$

est une équation de $\mathcal{C}$ dans un repère donné, alors

$$F^2(x, y) = 0$$

ou encore

$$F^3(x, y) = 0$$

sont aussi des équations de $\mathcal{C}$. Si de plus $G\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ ne s'annulle pour aucun (x, y), alors

$$G(x, y)\, F(x, y) = 0$$

est aussi une équation de $\mathcal{C}$. Si par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, la courbe d'équation $F(x, y) = 0$ est aussi la courbe d'équation

$$(x^2 + y^2 + 1)^k\, F(x, y) = 0$$

Nous montrerons cependant que dans certaines situations, le fait de fixer le degré de l'équation algébrique implique l'unicité (à multiplication par un scalaire près).

Soit $\mathcal{C}$ une courbe algébrique d'équation $F(x,y)=0$ où F est un polynome de degré d.

Proposition 2. *Tout changement de repère transforme l'équation algébrique $F(x,y)=0$ en une équation algébrique de même degré.*

Démonstration. Un changement de repère équivaut à un changement de variable du type

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13} \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23} \end{cases} \tag{1}$$

où $(c_{ij})_{i,j=1,2}$ est la matrice de passage de (e_1,e_2) l'ancienne base, vers (e_1',e_2') la nouvelle,

$$\underset{(e_1,e_2)}{\mathrm{Mat}}\,(e_1',e_2') = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de O', nouveau point origine, dans l'ancien repère (toute notation se rapportant au nouveau repère est primée). Il est clair que ce changement de variables transforme le polynome $F(x,\ y)$ en un polynome $F'(x',\ y')$ sans augmenter le degré. De la même manière, le changement inverse repose sur des formules de degré 1 analogues à (1), et donc transforme $F'(x',\ y')$ en $F(x,\ y)$ sans augmenter le degré. On en déduit que les polynomes F et F' ont le même degré. □

L'invariance du degré de l'équation par changement de repère nous inspire la

Définition 3. *Une courbe algébrique de degré deux est une courbe admettant une équation algébrique de degré deux dans un repère. D'après ce qui précède, cette courbe admet une équation algébrique de degré deux dans n'importe quel repère.*

Nous connaissons par exemple les *coniques* (hyperboles, paraboles et ellipses). Ce sont bien des courbes algébriques de degré deux. Les droites et les paires de droites sont aussi des courbes de degré deux : si $\mathcal{D}$ a pour équation

$$ax+by+c=0$$

alors $\mathcal{D}$ a aussi pour équation

$$(ax+by+c)^2=0$$

Si de plus $\mathcal{D}'$ a pour équation

$$kx+\ell y+m=0$$

alors la paire de droites $\mathcal{D}\cup\mathcal{D}'$ a pour équation

$$(ax+by+c)(kx+\ell y+m)=0$$

c'est à dire

$$akx^2+(a\ell+bk)xy+b\ell y^2+(am+ck)x+(bm+c\ell)y+cm=0$$

Si $\mathcal{C}$ est une courbe algébrique de degré deux et $\mathfrak{R}$ un repère du plan, alors $\mathcal{C}$ admet une équation du type

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \tag{2}$$

avec $(a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{K}^6$ et $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. Deux questions se posent.

Question 1. Cette courbe possède-t-elle plusieurs équations de degré deux dans le même repère ? On sait que si (2) est une équation de $\mathcal{C}$ alors pour tout $k\in\mathbb{K}\backslash\{0\}$, l'équation $k.(2)$ obtenue en multipliant (2) par k, est aussi une équation de $\mathcal{C}$. Aussi la vraie question ici est : $\mathcal{C}$ admet-elle d'autres équations que celles qui sont proportionnelles à (2), dans le repère fixé ?

Question 2. Peut-on simplifier l'équation de la courbe en changeant de repère ?

La question 2 pose le problème de la classification des équations de degré deux modulo changement de repère. La définition qui suit est nécessaire.

Définition 4. *On appelle équation tout couple* $(F, \mathfrak{R})$ *où* F *est une fonction de* $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ *vers* $\mathbb{K}$*, et* $\mathfrak{R}$ *un repère. L'équation* $(F, \mathfrak{R})$ *s'écrira usuellement* $F(x, y) = 0$*. On dit que* $\mathfrak{R}$ *est le repère dans lequel s'écrit l'équation* $(F, \mathfrak{R})$*. Si* F *est un polynome de degré* d*, on dit que* $(F, \mathfrak{R})$ *est algébrique de degré* d*.*

La donnée d'une *équation* au sens de la définition 4 définit naturellement une courbe du plan (éventuellement vide)

Par ailleurs, si $(F, \mathfrak{R})$ est une équation et $\mathfrak{R}'$ un repère, alors l'équation

$$F(x, y) = 0$$

se transforme, par changement de repère en une équation

$$F'(x', y') = 0$$

où $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont les nouvelles coordonnées. Nous disons alors que l'on passe de $(F, \mathfrak{R})$ à $(F', \mathfrak{R}')$ par changement de repère, ou encore que $(F, \mathfrak{R})$ et $(F', \mathfrak{R}')$ sont *liées par changement de repère*. Ceci définit une relation d'équivalence sur les équations.

Avertissement 5. ce n'est pas parce que deux équations $(F, \mathfrak{R})$ et $(F', \mathfrak{R}')$ définissent la même courbe qu'elles sont forcément liées par un changement de repère (c'est précisément le problème posé par la question 1).

2 Forme bilinéaire et forme linéaire associées à une équation de degré deux

Tout polynome

$$F(x) = ax^2 + bx + c$$

de degré deux, s'écrit comme la somme d'une forme quadratique, ax^2, d'une forme linéaire, bx, et d'une constante, c. Nous allons voir que ceci se généralise aux polynomes à deux indéterminées. En effet, si

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

on a

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f \tag{3}$$

Il en découle la

Définition 6. *Soit* $\mathcal{E} = (F, \mathfrak{R})$ *une équation algébrique de degré 2. On note* $\mathfrak{e}$ *la base de* $\mathfrak{R}$*.*

1. *La forme bilinéaire* $\mathfrak{B}$ *associée à* $\mathcal{E}$ *est la forme bilinéaire sur* $\vec{\mathcal{P}}$ *définie par*

$$\operatorname*{Mat}_{\mathfrak{e}} \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

2. *La forme linéaire* $\mathfrak{F}$ *associée à* $\mathcal{E}$ *est la forme linéaire sur* $\vec{\mathcal{P}}$ *définie par*

$$\operatorname*{Mat}_{\mathfrak{e}} \mathfrak{F} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$$

On rappelle que $\vec{\mathcal{P}}$ désigne l'espace vectoriel associé au plan affine $\mathcal{P}$. C'est pour simplifier les notations que nous avons choisi $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$ au lieu de $\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$, d'ailleurs, dans tout ce qui suit, nous écrirons les coefficients de l'équation (2) comme ceci

$$a_{11}\,x^2+2a_{12}\,xy+a_{22}\,y^2+2a_{13}\,x+2a_{23}\,y+a_{33}=0 \tag{4}$$

et nous noterons

$$A=\underset{\mathfrak{e}}{\mathrm{Mat}}\,\mathfrak{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

et

$$\underset{\mathfrak{e}}{\mathrm{Mat}}\,\mathfrak{F}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

On est maintenant tenté de dresser la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ . & . & a_{33} \end{pmatrix}$$

On verra que cette matrice (complétée par symétrie) possède une interprétation géométrique remarquable. On la notera A_+,

$$A_+=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Notation 7. *lorsque nous passons, par changement de repère, d'une équation de degré deux $\mathcal{E}=(F,\mathfrak{R})$ à une équation $\mathcal{E}'=(F',\mathfrak{R}')$, nous notons chaque élément lié à la deuxième équation en primant celui qui lui correspond dans la première. Ainsi,*

- *si $\mathfrak{R}=(O,e_1,e_2)$, on note $\mathfrak{R}'=(O',e_1',e_2')$,*
- *si $\mathcal{E}$ s'écrit*

$$a_{11}\,x^2+2a_{12}\,xy+a_{22}\,y^2+2a_{13}x+2a_{23}\,y+a_{33}=0$$

alors $\mathcal{E}'$ s'écrit

$$a_{11}'\,x'^2+2a_{12}'\,x'y'+a_{22}'\,y'^2+2a_{13}'\,x'+2a_{23}'\,y'+a_{33}'=0$$

- *si $\mathfrak{B}$ est la forme bilinéaire associée à $\mathcal{E}$, on note $\mathfrak{B}'$ la forme bilinéaire associée à $\mathcal{E}'$,*
- *si A est la matrice de $\mathfrak{B}$ dans (e_1,e_2), on note A' la matrice de $\mathfrak{B}'$ dans (e_1',e_2').*

On pourrait essayer de mesurer les effets d'un changement de repère en exprimant tout simplement chaque a_{ij}' en fonction des a_{ij}, mais ceci s'avère fastidieux et inutile. En revanche, si l'on conserve l'écriture exhibée en (3)

$$F(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+a_{33}$$

les calculs sont simples et féconds.

Proposition 8. *(Formules de changement de repère) On suppose que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont des équations de degré deux liées par un changement de repère. On note $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ les coordonnées de O' dans $\mathfrak{R}$ (le nouveau point origine exprimé dans l'ancien repère) et C la matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle. On a alors :*

$$\begin{aligned} A' &= C^T A C \\ \begin{pmatrix} a_{13}' & a_{23}' \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} A+\begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}\right] C \\ a_{33}' &= \left[\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} A+2\begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+a_{33} \end{aligned}$$

Démonstration. Ici la formule de changement de repère est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Calculons grâce à elle $F(x,y)$ en fonction de x' et y'.

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} \\
&= \left[\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T + \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \right] A \left[C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \left[C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] + a_{33} \\
&= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T A C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} A C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + a_{33} \\
&= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T A C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} A C + \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} A C + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} C \right] \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
&\quad \left[\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} A + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + a_{33}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. Notons que nous avons utilisé le fait que

1. $(XY)^T = Y^T X^T$ et $(X+Y)^T = X^T + Y^T$,
2. $\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$ et donc est égale à sa transposée,
3. A est symétrique et donc $A^T = A$. □

3 Invariants d'une équation de degré deux

Définition 9. *Une application $\mathcal{V}$ définie sur l'ensemble des équations $(F, \mathfrak{R})$ est un invariant si pour toute paire d'équations $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ liées par un changement de repère, on a $\mathcal{V}(\mathcal{E}) = \mathcal{V}(\mathcal{E}')$.*

La courbe $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ définie par $\mathcal{E}$ par exemple, est un invariant de $\mathcal{E}$ (encore heureux !) Le but de cette section est de trouver des invariants permettant de classifier les équations de degré deux.

3.1 Degré

La proposition 2 affirme que le degré d'une équation algébrique $(F, \mathfrak{R})$ est invariant par changement de repère. Le fait même d'être algébrique est invariant par changement de repère.

3.2 Forme bilinéaire

Proposition 10. *La forme bilinéaire associée à une équation de degré deux est invariante par changement de repère.*

Démonstration. Soient $\mathcal{E} = (F, \mathfrak{R})$ et $\mathcal{E}' = (F', \mathfrak{R}')$ des équations de degré deux liées par changement de repère. Par définition la forme bilinéaire $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$ associée à $\mathcal{E}$ est définie par

$$\operatorname*{Mat}_{\mathfrak{e}} \mathfrak{B}(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

et d'après la proposition 8, si C est la matrice de passage de $\mathfrak{e}$ vers $\mathfrak{e}'$, on a :

$$\operatorname*{Mat}_{\mathfrak{e}'} \mathfrak{B}(\mathcal{E}') = C^T A C$$

et on reconnaît la formule de changement de base pour les matrices des formes bilinéaires. Par conséquent $\mathfrak{B}(\mathcal{E}') = \mathfrak{B}(\mathcal{E})$. □

Contrairement à $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$, la forme linéaire $\mathfrak{F}(\mathcal{E})$ n'est pas invariante par changement de repère. En effet, la formule de changement de base pour une forme linéaire est

$$\operatorname*{Mat}_{\mathfrak{e}'} \mathfrak{F}(\mathcal{E}) = \operatorname*{Mat}_{\mathfrak{e}} \mathfrak{F}(\mathcal{E})\,.C$$

ce qui n'a rien à voir (en général) avec

$$\operatorname*{Mat}_{\mathfrak{e}'} \mathfrak{F}(\mathcal{E}') = \left[\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} A + \operatorname*{Mat}_{\mathfrak{e}} \mathfrak{F}(\mathcal{E}) \right] C.$$

3.3 Centres et discriminants

Définition 11. *Un point M_0 est un centre de l'équation $\mathcal{E}$ si le fait de mettre l'origine du repère en M_0 (sans changer les vecteurs) élimine les monomes de degré 1 de l'équation (les monomes de degré 1 sont les termes $2a_{13}\,x$ et $2a_{23}\,y$). On note $\mathcal{Z}(\mathcal{E})$ l'ensemble des centres de $\mathcal{E}$.*

Soient $\mathcal{E} = (F, \mathfrak{R})$ une équation de degré deux et M_0 un point de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{R}$. Soient $\mathfrak{R}'$ le repère et $\mathcal{E}' = (F', \mathfrak{R}')$ l'équation obtenus en prenant M_0 pour origine. La matrice de passage de l'ancienne vers la nouvelle base est

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc les changements de coordonnées sont donnés par

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

Ceci implique les égalités

$$\begin{cases} a'_{11} &=& a_{11} \\ a'_{12} &=& a_{12} \\ a'_{22} &=& a_{22} \\ a'_{13} &=& a_{11}\,x_0 + a_{12}\,y_0 + a_{13} \\ a'_{23} &=& a_{12}\,x_0 + a_{22}\,y_0 + a_{23} \\ a'_{33} &=& F(x_0, y_0). \end{cases}$$

Il en découle la

Proposition 12. *Les centres de l'équation $\mathcal{E}$ sont les points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan tels que*

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13} = 0 & (E_1) \\ a_{12}\,x + a_{22}\,y + a_{23} = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Remarque 13. Le système précèdent s'écrit matriciellement

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit la

Proposition 14. *L'ensemble $\mathcal{Z}(\mathcal{E})$ est un invariant de $\mathcal{E}$ (par changement de repère). Ainsi si $\mathcal{Z}(\mathcal{E}) \neq \varnothing$, alors pour n'importe quel repère centré en un point de $\mathcal{Z}(\mathcal{E})$, l'équation devient une équation sans monomes de degré 1.*

Démonstration.

1. D'après la proposition et la remarque qui précèdent, $\mathcal{Z}(\mathcal{E})$ est l'ensemble des points dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{R}$ vérifient

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{Z}(\mathcal{E}')$ est l'ensemble des points dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{R}$' vérifient

$$A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a'_{13} \\ a'_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit M un point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{R}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{R}'$. Soit C la matrice de pasage de $\mathfrak{e}$ vers $\mathfrak{e}'$. On a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

et d'après la deuxième formule de la proposition 8 on a

$$\begin{pmatrix} a'_{13} \\ a'_{23} \end{pmatrix}=C^T\left[A^T\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}\right]$$

d'où

$$\begin{aligned} A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a'_{13} \\ a'_{23} \end{pmatrix} &= (C^TA\,C)\,C^{-1}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}+C^T\left[A^T\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}\right] \\ &= C^T\left[A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}\right] \\ &= C^T\left[A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

mais C étant inversible, C^T l'est aussi, et par conséquent, pour tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{R}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{R}'$ on a :

$$A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a'_{13} \\ a'_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si et seulement si

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est à dire $M\in\mathcal{Z}(\mathcal{E})$ si et seulement si $M\in\mathcal{Z}(\mathcal{E}')$.

2. Montrons maintenant la deuxième assertion. Pour cela commençons par expliquer le sens et l'intérêt de celle-ci. Dire que M_0 est un centre de $\mathcal{E}=(F,\mathfrak{R})$ où $\mathfrak{R}=(0,e_1,e_2)$ signifie que l'équation $\mathcal{E}$ écrite dans le repère (M_0,e_1,e_2) ne contient pas de monomes de degré 1. En revanche, si on change les vecteurs du repère $(M_0,\ e_1,\ e_2)$, rien ne garantit que les monomes de degré 1 soient encore nuls, et c'est précisément cela qu'affirme la deuxième assertion. Supposons donc que $\mathcal{Z}(\mathcal{E})\neq\varnothing$, et considérons un repère quelconque $\mathfrak{R}'$ centré en un point M_0 de $\mathcal{Z}(\mathcal{E})$. Supposons que par changement de repère on passe de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$. D'après l'invariance de $\mathcal{Z}(\mathcal{E})$, M_0 est un centre de $\mathcal{E}'$ et donc $\mathcal{E}'$ ne contient pas de monomes de degré 1 □

Notons $\delta(\mathcal{E})$, ou plus simplement δ, s'il n'y aucune ambigüité, le déterminant du système formé par les équations (E_1) et (E_2) de la proposition 12 :

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Proposition 15. *L'équation $\mathcal{E}$ admets un centre unique si et seulement si $\delta\neq 0$.*

Démonstration. On sait que

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0 \\ a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0 \end{cases}$$

admets une solution unique si et seulement si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0.$ □

Définition 16. *On dit que $\mathcal{E}$ est centrale si elle possède un centre unique, c'est à dire si $\delta\neq 0$.*

Remarquons que le fait d'être centrale ne dépends pas du repère. Notons Nullite(δ) la valeur de la proposition logique « δ est nul » (c'est un booléen). Il découle de la proposition 14 la

Proposition 17. *Le booléen* Nullite(δ) *est un invariant de* $\mathcal{E}$ *(par changement de repère).*

Intéressons-nous maintenant aux courbes non centrales. D'après la proposition 12, lorsque $\delta = 0$, l'ensemble $\mathcal{Z}(\mathcal{E})$ est soit une droite, soit l'ensemble vide. Dans le cas particulier où c'est une droite, les équations (E_1) et (E_2) sont proportionnelles, l'une des deux pouvant éventuellement être triviale :

$$0=0$$

et les deux premières lignes de la matrice A_+, définie par (5), sont proportionnelles et donc $\det A_+ = 0$. Nous allons voir que la réciproque est vraie. Posons

$$\Delta = \det A_+$$

Nous avons la

Proposition 18. *Dans le cas où* $\delta = 0$ *on a l'équivalence suivante : l'équation* $\mathcal{E}$ *possède une pleine droite de centres si et seulement si* $\Delta = 0$.

Ainsi le couple (δ, Δ) décrit assez bien l'ensemble des centres.

Démonstration. Le sens direct étant établi nous ne traitons que la réciproque. On suppose que $\Delta = 0$. Remarquons d'abord que $\delta = 0$ signifie que soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{pmatrix}$$

(où $k \in \mathbb{K}$ peut être nul) soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Par symétrie de A, dans le premier cas on a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ ka_{11} & k^2 a_{11} \end{pmatrix}$$

et dans le deuxième,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Soient S_1 et S_2 les ensembles définis par les équations (E_1) et (E_2), respectivement. On a $\mathcal{Z} = S_1 \cap S_2$ et nous allons voir que $\{S_1, S_2\}$ est constitué soit d'une droite et du plan, soit d'une (double) droite.

a) Cas où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ ka_{11} & k^2 a_{11} \end{pmatrix}$. L'équation $\mathcal{E}$ étant de degré deux, on a $a_{11} \neq 0$ et

$$A_+ = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{11} & a_{13} \\ ka_{11} & k^2 a_{11} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

On en déduit, en développant sur la dernière colonne que

$$\Delta = a_{13} \begin{vmatrix} ka_{11} & k^2 a_{11} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ ka_{11} & k^2 a_{11} \end{vmatrix} = (ka_{13} - a_{23}) \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

d'où les deux possibilités suivantes :

i. $a_{23} = ka_{13}$. Dans ce cas (E_1) et (E_2) sont proportionnelles et le système qu'elles forment est

$$\begin{cases} a_{11}x + ka_{11}y + a_{13} = 0 \\ ka_{11}x + k^2 a_{11}y + ka_{13} = 0 \end{cases}$$

On voit bien, a_{11} étant non nul, que S_1 est une droite. De plus, si $k = 0$, $S_2 = \mathcal{P}$ et si $k \neq 0$, $S_2 = S_1$. Dans les deux cas $\mathcal{Z}$ est une droite.

ii. $\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$. Dans ce cas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ \ell a_{11} & \ell ka_{11} \end{pmatrix},$$

où $\ell \in \mathbb{K}$

(le cas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

est exclu puisque $a_{11} \neq 0$).

Comme au cas précèdent, (E_1) et (E_2) (qui sont les deux premières lignes de A_+) sont alors proportionnelles et définissent une droite.

b) Cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$. L'équation $\mathcal{E}$ étant de degré deux on a forcément $a_{22} \neq 0$ et

$$A_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

En développant sur la première ligne on trouve

$$\Delta = a_{13} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

d'où les deux possibilités ci-dessous :

i. $a_{13} = 0$. On a alors $S_1 = \mathcal{P}$ et S_2 est une droite, d'où le résultat.

ii. $\begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$. On a alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & ka_{22} \end{pmatrix}$$

où $k \in \mathbb{K}$

(le cas

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

est exclu puisque $a_{22} \neq 0$).

Ainsi la première ligne de A_+ est nulle et la deuxième est égale à $\begin{pmatrix} 0 & a_{22} & ka_{22} \end{pmatrix}$, ce qui montre que $S_1 = \mathcal{P}$ et S_2 est une droite.

Nous avons démontré que $\mathcal{Z}$ est une droite dans tous les cas. □

Nous possédons désormais une interprétation géométrique de Δ lorsque $\delta = 0$. Mais que signifie $\Delta = 0$ lorsque $\delta \neq 0$?

La nullité de Δ signifie que le système

$$A_+ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

admet une solution non triviale. Commençons par un cas particulier en supposant que le triplet $(x, y, 1)$ vérifie

$$A_+ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons alors :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 & \text{(on reconnaît } (E_1)) \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 & \text{(on reconnaît } (E_2)) \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0 & (E_3) \end{cases}$$

Il s'ensuit que $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}(\mathcal{E})$ et il se trouve que l'équation $x.(E_1) + y.(E_2) + (E_3)$ équivaut à $\mathcal{E}$, ainsi $M \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$. Nous venons de démontrer le

Lemme 19. *Si*

$$A_+ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}(\mathcal{E}) \cap \mathcal{C}(\mathcal{E})$$

Passons au cas général en supposant que (6) admet une solution non triviale (x, y, z). L'inégalité $\delta \neq 0$ implique $z \neq 0$ et donc :

$$\begin{cases} a_{11}\,\frac{x}{z} + a_{12}\,\frac{y}{z} + a_{13} = 0 & \text{(on reconnaît } (E_1)) \\ a_{12}\,\frac{x}{z} + a_{22}\,\frac{y}{z} + a_{23} = 0 & \text{(on reconnaît } (E_2)) \\ a_{13}\,\frac{x}{z} + a_{23}\,\frac{y}{z} + a_{33} = 0 & \text{(on reconnaît } (E_3)) \end{cases}$$

Ainsi $M_0\begin{pmatrix} x/z \\ y/z \end{pmatrix}$ est le centre de $\mathcal{E}$ et appartient à la courbe. Nous avons démontré que si Δ est nul alors le centre appartient à la courbe. La réciproque est-elle vraie ?

Soit $\mathcal{E}$ une équation centrale telle que son centre $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ appartienne à $\mathcal{C}$. On a alors :

$$\begin{cases} a_{11}\,x_0 + a_{12}\,y_0 + a_{13} = 0 \;\; (E_1) \\ a_{12}\,x_0 + a_{22}\,y_0 + a_{23} = 0 \;\; (E_2) \end{cases}$$

et donc (x_0, y_0) vérifie $x_0.(E_1) + y_0.(E_2)$, c'est à dire

$$a_{11}\,x_0^2 + 2\,a_{12}\,x_0\,y_0 + a_{22}\,y_0^2 + a_{13}\,x_0 + a_{23}\,y_0 = 0$$

Par ailleurs (x_0, y_0) vérifie aussi $\mathcal{E}$ car $M_0 \in \mathcal{C}$, c'est à dire

$$a_{11}\,x_0^2 + 2\,a_{12}\,x_0\,y_0 + a_{22}\,y_0^2 + 2\,a_{13}\,x_0 + 2\,a_{23}\,y_0 + a_{33} = 0$$

Soustrayons $x_0.(E_1) + y_0.(E_2)$ à cette dernière équation, on obtient

$$a_{13}\,x_0 + a_{23}\,y_0 + a_{33} = 0$$

et on reconnaît (E_3). Ainsi $(x_0, y_0, 1)$ est solution de (6). Comme il s'agit d'une solution non triviale, on a $\Delta = 0$, ce qui prouve la réciproque. Résumons.

Proposition 20. *Il existe quatre types disjoints d'équations algébriques de degré deux :*

Type I_1	:	$\delta \neq 0$ *et* $\Delta \neq 0$,	$\mathcal{E}$ *est centrale et son centre n'appartient pas à la courbe.*
Type I_0	:	$\delta \neq 0$ *et* $\Delta = 0$,	$\mathcal{E}$ *est centrale et son centre appartient à la courbe.*
Type *II*	:	$\delta = 0$ *et* $\Delta \neq 0$,	$\mathcal{E}$ *ne possède pas de centre.*
Type *III*	:	$\delta = 0$ *et* $\Delta \neq 0$,	$\mathcal{E}$ *possède une pleine droite de centres.*

De plus, le type ainsi défini est un invariant (par changement de repère).

On peut considérer cette proposition comme une première classification des *équations* de degré deux. Notons au passage que nous avons démontré que Nullite(Δ) est un invariant de l'équation. Nous verrons que dans les situations les plus courantes, I correspond aux ellipses et hyperboles, II aux paraboles et III aux paires de droites, mais nous n'en sommes pas encore là. Les propriétés de δ et Δ justifient la

Définition 21. *Les scalaires $\delta(\mathcal{E})$ et $\Delta(\mathcal{E})$ sont appelés premier et deuxième discriminants de $\mathcal{E}$, respectivement.*

La proposition qui suit est presque une caractérisation géométrique du centre.

Proposition 22.

1. *Si M est un centre de $\mathcal{E}$, alors M est un centre de symétrie de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.*
2. *Réciproquement, si M est un centre de symétrie de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ alors, soit M est un centre de $\mathcal{E}$, soit $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est contenue dans la droite d'équation $a_{13}\,x + a_{23}\,y = 0$.*

Cette proposition nous permettra de caractériser géométriquement les différents types d'équations apparaissant dans les classifications données plus bas.

Démonstration.

1. On suppose que M est un centre de $\mathcal{E}$. D'après la définition il existe un repère d'origine M dans lequel l'équation $\mathcal{E}$ s'écrit
$$F(x,y)=0$$
avec
$$F(x,y)=a_{11}\,x^2+2a_{12}\,xy+a_{22}\,y^2+a_{33}$$
Comme pour tous x,y,
$$F(-x,-y)=F(x,y)$$
l'origine du repère, en l'occurence le point M, est un centre de symétrie de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.
2. On suppose que M est un centre de symétrie de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Fixons un repère d'origine M. On suppose que dans ce repère l'équation $\mathcal{E}$ s'écrit
$$a_{11}\,x^2+2a_{12}\,xy+a_{22}\,y^2+2a_{13}\,x+2a_{23}\,y+a_{33}=0$$
Soit $N\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathcal{C}(\mathcal{E})$. D'après l'hypothèse, $N'\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}\in\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Par conséquent (x,y) vérifie
$$\begin{cases} a_{11}\,x^2+2a_{12}\,xy+a_{22}\,y^2+2a_{13}\,x+2a_{23}\,y+a_{33}=0 \\ a_{11}\,x^2+2a_{12}\,xy+a_{22}\,y^2-2a_{13}\,x-2a_{23}\,y+a_{33}=0 \end{cases}$$
Ce qui donne, en soustrayant la deuxième équation à la première, et en divisant le résultat par quatre,
$$a_{13}\,x+a_{23}\,y=0$$
d'où le résultat. □

3.4 Directions asymptotiques

Si a est un vecteur vérifiant $\mathfrak{B}(a,a)=0$, alors tout vecteur colinéaire à a vérifie aussi la même propriété. Ceci justifie la

Définition 23. *Soit $\mathcal{D}$ une direction de $\mathcal{P}$. On dit que $\mathcal{D}$ est une direction asymptotique de $\mathcal{E}$ si $\mathcal{D}$ est dirigée par un vecteur a vérifiant* $\mathfrak{B}(a,a)=0$.

On rappelle qu'une direction est une droite vectorielle de $\vec{\mathcal{P}}$. Si $\mathcal{D}$ est une direction, on dit d'un vecteur non nul a appartenant à $\mathcal{D}$ qu'il *dirige* $\mathcal{D}$; d'ailleurs $\mathcal{D}$ peut alors s'écrire
$$\mathcal{D}=\mathbb{K}.a$$

Lorsque le plan est muni d'un repère nous avons une correspondance bi-univoque entre les directions et les droites passant par l'origine. Dans cette situation on identifie les uns avec les autres.

Supposons que le plan est muni d'un repère et que $\mathcal{D}$ est une direction. Cette dernière admet alors une équation du type
$$ax+by=0$$
et nous désignerons cette direction par la notation
$$-b:a$$
qui s'inspire des coordonnées d'un de ses vecteurs directeurs. Il est clair que la notation $\ell:m$ n'a de sens que si

- un repère a été fixé (ou moins une base sur le plan vectoriel),
- et $(\ell,m)\neq(0,0)$,

par ailleurs
$$\ell:m=\ell':m'$$

si seulement si (ℓ, m) et (ℓ', m') sont proportionnels.

Etant donné que la forme bilinéaire associée à une équation est invariante par changement de repère, la proposition suivante est triviale.

Proposition 24. *L'ensemble des directions asymptotiques d'une équation $\mathcal{E}$ est un invariant de $\mathcal{E}$ (invariant par changement de repère).*

Cherchons alors les directions asymptotiques d'une équation $\mathcal{E}$ quelconque. La direction $\ell : m$ est une direction asymptotique de $\mathcal{E}$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} = 0 \tag{7}$$

qui équivaut à

$$a_{11}\,\ell^2 + 2a_{12}\,\ell m + a_{22}\,m^2 = 0 \tag{8}$$

Ceci est ce qu'on appelle une *équation quadratique* à deux inconnues.

Commençons par chercher les directions non horizontales (c'est à dire telles que $m \neq 0$). Pour une telle solution, (8) équivaut à

$$a_{11}\left(\frac{\ell}{m}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\ell}{m} + a_{22} = 0,$$

équation en $\frac{\ell}{m}$ du second degré, dont le discriminant est $4(-\delta)$. Ainsi, si $-\delta$ ne possède pas de racines carrées dans $\mathbb{K}$, il n'y a pas de solutions non horizontales. Supposons que $\sqrt{-\delta} \in \mathbb{K}$. Dans ce cas il y a deux solutions

$$\frac{\ell}{m} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-\delta}}{a_{11}}$$

d'où les deux directions

$$\ell : m = -a_{12} \pm \sqrt{-\delta} : a_{11}$$

Cherchons maintenant les directions non verticales (c'est à dire telles que $\ell \neq 0$). Pour de telles solutions, (7) équivaut à

$$a_{11} + 2a_{12}\frac{m}{\ell} + a_{22}\left(\frac{m}{\ell}\right)^2 = 0,$$

équation du second degré dont le discriminant est là aussi $4(-\delta)$.

Nous obtenons un premier résultat : si $\sqrt{-\delta} \notin \mathbb{K}$, alors $\mathcal{E}$ ne possède *aucune* direction asymptotique.

Revenons aux directions non verticales en supposant que $\sqrt{-\delta} \in \mathbb{K}$. Dans ce cas il y a deux solutions

$$\frac{m}{\ell} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-\delta}}{a_{22}}$$

d'où les deux directions

$$\ell : m = a_{22} : -a_{12} \pm \sqrt{-\delta}$$

Nous avons donc quatre formules donnant les directions asymptotiques de $\mathcal{E}$. Avant de les analyser, regardons ce qui se passe lorsque δ est nul (i.e. lorsque $\mathcal{E}$ est non centrale).

Si $\delta = 0$ alors les directions asymptotiques sont

$$\begin{cases} -a_{12} : a_{11} \\ a_{22} : -a_{12} \end{cases}$$

mais ces deux directions ne font qu'une car

$$\begin{vmatrix} -a_{12} & a_{22} \\ a_{11} & -a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\delta = 0,$$

Nous pouvons donc affirmer ceci :

Proposition 25. *Si $\delta = 0$, alors $\mathcal{E}$ ne possède qu'une direction asymptotique, la direction*

$$-a_{12} : a_{11} = a_{22} : -a_{12}$$

Attention. Il se peut qu'un des membres de cette égalité ne soit pas défini, c'est le cas par exemple lorsque $(a_{12}, a_{11}) = (0, 0)$. Ceci étant dit, le fait que $\mathcal{E}$ soit de degré deux implique qu'au moins l'un des deux est défini. Ainsi, lorsque l'on applique la proposition 25, il ne faut garder que les expressions qui ont du sens !

Nous verrons plus loin que la réciproque de la proposition précèdente est vraie, mais avant nous allons nous intéresser aux quatre directions asymptotiques trouvées lors de la résolution de l'équation (8) (dans le cas $\delta \neq 0$ et $\sqrt{-\delta} \in \mathbb{K}$). Notons :

$$\begin{cases} f_+ &= -a_{12} + \sqrt{-\delta} : a_{11} \\ g_- &= a_{22} : -a_{12} - \sqrt{-\delta} \\ f_- &= -a_{12} - \sqrt{-\delta} : a_{11} \\ g_+ &= a_{22} : a_{12} + \sqrt{-\delta} \end{cases}$$

Proposition 26.

1. *Au moins une des deux directions f_+ ou g_- est bien définie.*
2. *Même chose avec f_- et g_+.*

Démonstration. Supposons que f_+ et g_- ne sont pas définies, autrement dit que

$$\begin{cases} -a_{12} + \sqrt{-\delta} = 0 &= 0 \\ a_{11} &= 0 \\ a_{22} &= 0 \\ -a_{12} - \sqrt{-\delta} = 0 &= 0 \end{cases}$$

Alors $\sqrt{-\delta} = a_{12} = -a_{12} = 0$, d'où $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, ce qui est impossible pour une équation de degré deux. Le raisonnement est analogue pour f_- et g_+. □

Proposition 27.

1. *Si f_+ et g_- sont définies, alors $f_+ = g_-$.*
2. *Si f_- et g_+ sont définies, alors $f_- = g_+$.*

Démonstration. Nous allons distinguer deux cas.

1. Cas $-a_{12} + \sqrt{-\delta} = 0$, i.e. $\sqrt{-\delta} = a_{12}$. Etant donné que $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, on a $a_{11}a_{22} = 0$. Si a_{11} était nul, f_+ ne serait pas définie. Par conséquent $a_{11} \neq 0$, et $a_{22} = 0$. On a alors
$$\begin{cases} f_+ = 0 : a_{11} \\ g_- = 0 : -a_{12} - \sqrt{-\delta} \end{cases}$$
d'où l'égalité.
2. Cas $-a_{12} + \sqrt{-\delta} \neq 0$. On peut alors écrire
$$\begin{aligned} -a_{12} + \sqrt{-\delta} : a_{11} &= 1 : \frac{a_{11}}{-a_{12} + \sqrt{-\delta}} \\ &= 1 : \frac{a_{11}\,(-a_{12} - \sqrt{-\delta})}{a_{12}^2 + \delta} \\ &= a_{22} : \frac{a_{11}\,a_{22}\,(-a_{12} - \sqrt{-\delta})}{a_{11}\,a_{22}} \\ &= a_{22} : -a_{22} - \sqrt{-\delta} \end{aligned}$$

La deuxième assertion se montre de la même manière. □

En résumé, les directions asymptotiques d'une équation centrale $\mathcal{E}$ pour laquelle $\sqrt{-\delta} \in \mathbb{K}$ sont données par les formules

$$\begin{cases} d_1 = -a_{12} + \sqrt{-\delta} : a_{11} = a_{22} : -a_{12} - \sqrt{-\delta} \\ d_2 = -a_{12} - \sqrt{-\delta} : a_{11} = a_{22} : -a_{12} + \sqrt{-\delta} \end{cases}$$

avec lesquelles on prends bien soin de ne garder que les expressions qui ont du sens. Par conséquent, une équation quelconque $\mathcal{E}$ admet soit zéro (cas $\sqrt{-\delta} \notin \mathbb{K}$), soit une (cas $d_1 = d_2$), soit deux directions asymptotiques (cas $d_1 \neq d_2$).

Terminons cette étude en étudiant le cas où $\mathcal{E}$ n'admet qu'une seule direction asymptotique. Dans ce cas, $-a_{12} + \sqrt{-\delta} = -a_{12} - \sqrt{-\delta}$, et donc $\sqrt{-\delta} = -a_{12} = a_{12} = 0$, d'où $\delta = 0$ (nous venons d'établir la réciproque de la proposition 25).

Il est temps de rassembler tous ces résultats :

Proposition 28. *Directions asymptotiques d'une équation de degré deux.*

1. *Si $\mathcal{E}$ est une équation centrale ($\delta \neq 0$), il y a deux possibilités :*

   Soit $\sqrt{-\delta} \notin \mathbb{K}$ et alors $\mathcal{E}$ ne possède pas de directions asymptotiques.

   Soit $\sqrt{-\delta} \in \mathbb{K}$ et alors $\mathcal{E}$ possède deux directions asymptotiques qui sont

$$\begin{cases} -a_{12} + \sqrt{-\delta} : a_{11} = a_{22} : -a_{12} - \sqrt{-\delta} \\ -a_{12} - \sqrt{-\delta} : a_{11} = a_{22} : -a_{12} + \sqrt{-\delta} \end{cases}$$

2. *Si $\mathcal{E}$ est une équation non centrale ($\delta = 0$), $\mathcal{E}$ admet exactement une direction asymptotique, la direction $-a_{12} : a_{11} = a_{22} : -a_{12}$.*

Nous donnons d'autres résultats sur ce sujet en annexe 11.

3.5 Conjugaison

On rappelle que toute forme bilinéaire est homogène, ce qui signifie que pour tous $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$,

$$\mathfrak{B}(k_1 a_1, k_2 a_2) = k_1 k_2 . \mathfrak{B}(a_1, a_2)$$

Ceci justifie la

Définition 29. *On se donne deux vecteurs non nuls a_1 et a_2. On dit que la direction $\mathbb{K}.a_1$ est conjuguée à la direction $\mathbb{K}.a_2$, par rapport à l'équation $\mathcal{E}$, si $\mathfrak{B}(a_1, a_2) = 0$.*

On notera que la relation de conjugaison est symétrique et que toute direction asymptotique est conjuguée à elle-même (autoconjuguée).

Lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité sur $\mathcal{E}$, on ne précise pas par rapport à quelle équation sont conjuguées deux directions.

Remarque 30. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. $\ell : m$ et $\ell' : m'$ sont conjuguées.

ii. $\begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' \\ m' \end{pmatrix} = 0$

iii. $\begin{pmatrix} \ell' & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} = 0$

iv. $(a_{11} \ell + a_{12} m) \ell' + (a_{12} \ell + a_{22} m) m' = 0$

v. $(a_{11} \ell' + a_{12} m') \ell + (a_{12} \ell' + a_{22} m') m = 0$

Fixons une direction $\ell : m$ et cherchons toutes les directions qui lui sont conjuguées (si elles existent). D'après la remarque précèdente, les directions recherchées forment l'ensemble :

$$\mathrm{Conj}(\ell : m) = \{\ell' : m' \,;\, (a_{11} \ell + a_{12} m) \ell' + (a_{12} \ell + a_{22} m) m' = 0\}$$

Remarquons que si

$$\begin{cases} a_{11}\,\ell + a_{12}\,m = 0 \\ a_{12}\,\ell + a_{22}\,m = 0 \end{cases}$$

l'équation (iv) équivaut à $0\ell' + 0m' = 0$. Dans ce cas on a $\delta = 0$, la direction $\ell : m$ est *la* direction asymptotique

$$\ell : m = -\,a_{12} : a_{11} = a_{22} : -\,a_{12}$$

(voir proposition 28) et elle est conjuguée à toutes les directions du plan. On écrit alors

$$\mathrm{Conj}(\ell : m) = D_0(\mathcal{P})$$

où $D_0(\mathcal{P})$ désigne l'ensemble de toutes les directions du plan $\mathcal{P}$.

En revanche, si

$$(a_{11}\,\ell + a_{12}\,m, a_{12}\,\ell + a_{22}\,m) \neq (0, 0),$$

alors $\mathrm{Conj}(\ell : m)$ se réduit à un seul élément, la direction d'équation

$$(a_{11}\,\ell + a_{12}\,m)\,x + (a_{12}\,\ell + a_{22}\,m)\,y = 0$$

c'est à dire

$$-\,(a_{12}\,\ell + a_{22}\,m) : a_{11}\,\ell + a_{12}\,m$$

En résumé, si $\mathcal{E}$ est centrale, l'application

$$\begin{array}{rcl} D_0(\mathcal{P}) & \longrightarrow & D_0(\mathcal{P}) \\ \ell : m & \longmapsto & \text{la direction conjuguée à } \ell : m \end{array}$$

est bien définie et c'est une involution. Nous avons clairement la

Proposition 31. *Lorsque $\mathcal{E}$ est centrale, $\ell : m$ est autoconjuguée si et seulement si $\ell : m$ est une direction asymptotique.*

Il découle de tout ceci que si $\ell : m$ est une direction non asymptotique, alors $\ell : m$ possède une unique direction conjuguée $\ell' : m'$ qui lui est distincte. On a le même résultat pour les équations non centrales.

Proposition 32. *Directions conjuguées d'une équation de degré 2.*

1. *Si $\mathcal{E}$ est centrale, chaque direction de $\mathcal{E}$ possède une unique direction conjuguée. De plus, les seules directions qui soient autoconjuguées sont les directions asymptotiques de $\mathcal{E}$ (on rappelle qu'il y en a zéro ou deux).*
2. *Si $\mathcal{E}$ est non centrale (on rappelle que dans ce cas $\mathcal{E}$ possède une direction asymptotique unique)*
   - *la direction asymptotique de $\mathcal{E}$ est conjuguée à toutes les directions du plan.*
   - *Chaque direction non asymptotique est conjuguée à la direction asymptotique et uniquement à celle-ci.*

Cette propriété des équations non centrales nous conduit à écrire la

Définition 33. *La direction asymptotique d'une équation non centrale s'appelle aussi la direction singulière (puisqu'elle est singulière par rapport à la conjugaison). On dit de toutes les autres que ce sont des directions régulières. Dans le cas d'une équation centrale toutes les directions sont régulières.*

La forme bilinéaire étant invariante, nous avons clairement la

Proposition 34. *La relation de conjugaison est un invariant de l'équation, autrement dit,* $\mathrm{Conj}(\ell : m)$ *est invariant par changement de repère.*

3.6 Diamètre conjugué à une direction

Définition 35. *Soit $\mathcal{D}$ une direction régulière de $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{D} = \ell \colon m$ dans le repère de $\mathcal{E}$. Le diamètre conjugué à $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{E}$ est la droite d'équation*

$$(a_{11}\,\ell + a_{12}\,m)x + (a_{12}\,\ell + a_{22}\,m)\,y + (a_{13}\,\ell + a_{23}\,m) = 0 \tag{9}$$

On note $\operatorname{diam}_{\mathcal{E}}(\mathcal{D})$ *cette droite.*

L'équation (9) dépends en apparence de ℓ et m. Le lecteur notera qu'en fait elle ne dépends que de $\ell \colon m$, ce qui justifie la définition. Notons également que cette équation s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} = 0$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité sur $\mathcal{E}$, on note $\operatorname{diam}(\mathcal{D})$ le diamètre conjugué. On remarque que la direction de $\operatorname{diam}(\mathcal{D})$ est la direction conjuguée à $\mathcal{D}$ et qu'il est donc impossible d'étendre cette définition aux directions singulières. On notera aussi que si $\mathcal{E}$ est non centrale et $\ell \colon m$ régulière, $\operatorname{diam}(\ell \colon m)$ est portée par la direction singulière.

Proposition 36. *Le diamètre conjugué à une direction est invariant par changement de repère.*

Démonstration. On reprend les notations de 7. Soit d une direction régulière. Dans le repère $\mathfrak{R}$, la direction d s'écrit

$$d = \ell \colon m$$

tandis que dans $\mathfrak{R}'$,

$$d = \ell' \colon m'$$

(attention, cette notation dépend du repère). Soient C la matrice de passage de $\mathfrak{e}$ vers $\mathfrak{e}'$ et $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ les coordonnées de O' dans $\mathfrak{R}$. On a

$$C = \operatorname*{mat}_{\mathfrak{e}} \mathfrak{e}'$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \ell' \\ m' \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix}$$

Dans $\mathfrak{R}'$, l'équation du $\mathcal{E}'$-diamètre conjugué à d s'écrit

$$\begin{pmatrix} \ell' & m' \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_{13} & a'_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' \\ m' \end{pmatrix} = 0$$

or d'après les formules de changement de repère,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \ell' & m' \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_{13} & a'_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' \\ m' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix} (C^{-1})^T C^T A\, C\, C^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \left[\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \right] C\, C^{-1} \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi dans $\mathfrak{R}$, l'équation du $\mathcal{E}'$-diamètre conjugué à d et celle du $\mathcal{E}$-diamètre conjugué à d coïncident, d'où le résultat. □

Nous donnons d'autres résultats sur ce thème à l'annexe 12. En attendant, nous connaissons maintenant assez d'invariants pour classifier les courbes de degré deux.

4 Classification dans le cas général

4.1 Equations centrales

Soit $\mathcal{E}$ une équation de degré 2 de centre M_0. Nous allons voir qu'en prenant un repère d'origine M_0 construit avec deux vecteurs conjugués, les termes en $x y$, x et y de l'équation vont disparaître.

Concrètement, prenons un vecteur a_1 de direction non asymptotique. D'après la proposition 32, la direction $\mathcal{D}_2$ conjuguée à $\mathbb{K} a_1$ est distincte de cette dernière. Ainsi, en prenant un vecteur a_2 non nul de direction $\mathcal{D}_2$, nous obtenons un repère

$$\mathfrak{R}' = (M_0, a_1, a_2)$$

Proposition 37. *L'équation $\mathcal{E}'$ ne contient pas de monomes de degré 1, autrement dit*

$$a'_{13} = a'_{23} = 0$$

Démonstration. Ceci découle du fait que, d'après la proposition 14, M_0 qui est l'origine du repère de $\mathcal{E}'$ est aussi le centre de $\mathcal{E}'$. □

Proposition 38. *L'équation $\mathcal{E}'$ ne contient pas de monomes de la forme $a x' y'$, autrement dit*

$$a'_{12} = 0$$

Démonstration.

1. Les vecteurs a_1 et a_2 étant conjugués, on a $\mathfrak{B}(a_1, a_2) = 0$.
2. D'un autre côté, en calculant dans $\mathfrak{R}'$ on a :

$$\mathfrak{B}(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a'_{12}$$

ce qui implique $a'_{12} = 0$. □

L'équation $\mathcal{E}'$ s'écrit donc

$$a'_{11} x'^2 + a'_{22} y'^2 + a'_{33} = 0$$

avec a'_{11} et a'_{22} non nuls (car $\det A \neq 0$).

On notera une réciproque à ceci : si $\mathcal{E} = (F, \mathfrak{R})$ est une équation de la forme

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} = 0$$

avec a_{11} et a_{22} non nuls, alors l'origine de $\mathfrak{R}$ est le centre de $\mathcal{E}$ et les axes des coordonnées sont des directions conjuguées. Mieux : les axes sont des diamètres conjugués l'un de l'autre. En effet, par simple calcul on obtient l'équation de diam$(1{:}\,0)$:

$$x = 0$$

et celle de diam$(0{:}\,1)$:

$$y = 0$$

Proposition 39. *Pour toute courbe admettant une équation centrale de degré 2, il existe un repère dans lequel l'équation est de la forme $a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} = 0$, avec a_{11} et a_{22} non nuls. De plus, un repère admet cette propriété si et seulement si son origine est le centre de l'équation et les axes des coordonnées sont des diamètres conjugués l'un de l'autre.*

4.2 Equations non centrales

Soit $\mathcal{E}$ une équation de degré deux non centrale. Alors nous savons qu'il y a une seule direction singulière (c'est aussi l'unique direction asymptotique)

$$-a_{12} : a_{11} = -a_{22} : a_{12}$$

Soit $\mathbb{K}a_2$ une direction régulière, cette direction portera le nouvel axe des ordonnées. Soit $\mathcal{D}$ le diamètre conjugué à $\mathbb{K}a_2$, ce sera le nouvel axe des abscisse. Bien entendu

$$\vec{\mathcal{D}} = -a_{12} : a_{11} = -a_{22} : a_{12}$$

(dans $\mathfrak{R}$). Soient a_1 un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, $M \in \mathcal{D}$ et $\mathfrak{R}' = (M, a_1, a_2)$. On reprend les notations de 7. Puisque dans $\mathfrak{R}'$, la direction de $\mathcal{D}$ s'écrit

$$-a'_{12} : a'_{11} = -a'_{22} : a'_{12} = 1 : 0$$

on a forcément

$$\begin{cases} a'_{11} = 0 \\ a'_{12} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, d'après cette égalité et la définition du diamétre conjugué, l'équation de $\mathcal{D}$ dans $\mathfrak{R}'$ est

$$a'_{22}\, y' + a'_{23} = 0$$

mais $\mathcal{D}$ est l'axe des abscisses de $\mathfrak{R}'$, par conséquent,

$$\begin{cases} a'_{23} = 0 \\ a'_{22} \neq 0 \end{cases}$$

et $\mathcal{E}'$ s'écrit

$$a'_{22}\, y'^2 + 2a'_{13}\, x' + a'_{33} = 0$$

On ne s'étonnera pas de la nullité de a'_{12}, compte tenu du fait que les axes du nouveau repère sont conjugués.

Considérons maintenant une courbe d'équation

$$a_{22}\, y^2 + 2a_{13}\, x + a_{33} = 0$$

et calculons le deuxième discriminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{22}\, a_{13}^2.$$

Le coefficient a_{22} étant non nul, on a Nullite(Δ) = Nullite(a_{13}). La proposition 20 nous donne alors deux résultats :

Proposition 40. *Pour toute courbe de degré deux non centrale possédant une pleine droite de centres, il existe un repère dans lequel l'équation est de la forme*

$$a_{22}\, y^2 + a_{33} = 0$$

avec $a_{22} \neq 0$. *Un repère admet cette propriété si et seulement si la direction de l'axe des ordonnées n'est pas singulière et admets l'axe des abscisses comme diamètre conjugué.*

La seule chose que nous n'ayons pas démontré est le fait que pour une équation $a_{22}\, y^2 + a_{33} = 0$, il y a une pleine droite de centres et que l'axe des ordonnées admet l'axe des abscisses comme diamètre conjugué, mais ceci découle d'une simple application des définitions.

Proposition 41. *Pour toute courbe de degre deux non centrale ne possédant pas de centre, il existe un repère dans lequel l'équation est de la forme*

$$a_{22}\, y^2 + 2a_{13}\, x = 0$$

avec a_{22} *et* a_{13} *non nuls. Un repère admet cette propriété si et seulement si la direction de l'axe des ordonnées n'est pas singulière, admets l'axe des abscisses comme diamètre conjugué et l'origine se trouve sur la courbe.*

Démonstration.

1. Nous avons établi que pour une équation ne possédant pas de centre il existe un repère où cette équation s'écrit
$$a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x + a_{33} = 0$$
avec a_{22} et a_{13} non nuls, car $\mathrm{Nullite}(a_{13}) = \mathrm{Nullite}(\Delta)$. Par ailleurs, le point d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses a pour abscisse $-\frac{a_{33}}{2a_{13}}$. Ainsi, si nous plaçons l'origine du repère en ce point, l'équation de la courbe se change en
$$a'_{22}\, y'^2 + 2\, a'_{13}\, x' = 0$$
2. Le reste de ce qui est énoncé ne pose aucune difficulté : le lecteur vérifiera que le l'équation $a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x = 0$ (a_{22}, $a_{13} \neq 0$) n'a pas de centre, que pour elle, la direction $x = 0$ n'est pas singulière, qu'elle admet la droite $y = 0$ comme diamètre et que l'origine appartient à la courbe. □

4.3 Première classification

Il s'agit ici de résumer les paragraphes 5 et 4.2 en un théorème. On rappelle que nous travaillons dans un plan affine $\mathcal{P}$ sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de deux.

Théorème 42. *Classification dans le cas général. Pour toute courbe de degré deux, il existe un repère dans lequel la courbe admet une équation appartenant à l'un des trois types suivants :*

Type I	$a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + a_{33} = 0$	*avec* a_{11} *et* a_{22} *non nuls,*
Type II	$a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x = 0$	*avec* a_{22} *et* a_{13} *non nuls,*
Type III	$a_{22}\, y^2 + a_{33} = 0$	*avec* a_{22} *non nuls.*

Ces types correspondent à

I	*équation centrale,*
II	*équation sans centre,*
III	*équation avec une pleine droite de centres.*

De plus, aucune courbe ne peut avoir des équations de types différents.

La seule chose qui n'a pas été démontrée est la dernière assertion : *aucune courbe ne peut avoir des équations de types différents.* Nous admettrons ce résultat dans le cas général et nous le démontrerons en situation complexe et réelle-complexe. Voici une autre manière d'écrire cette classification :

Théorème 43. *Classification dans le cas général (bis). Pour toute courbe de degré deux, il existe un repère dans lequel la courbe admet une équation appartenant à l'un des trois types suivants :*

I_1	$Ax^2 + By^2 = 1$
I_0	$Ax^2 + By^2 = 0$
II	$y^2 = 2Ax$
III_1	$y^2 + A = 0$
III_0	$y^2 = 0$

avec A et B non nuls. De plus, aucune courbe ne peut avoir des équations de types différents.

Signalons que nous avons conservé les notations I_0, I_1, II et III de la proposition 20.

Démonstration.

- Si $a_{33} \neq 1$, nous divisons I par $-a_{33}$, ce qui donne une équation du type I_1, sinon l'équation I est déjà du type I_0.
- L'équation II a été modifiée en divisant par a_{22} et en transposant le terme en x de l'autre côté de l'égalité ($a_{22} \neq 0$).

- Si on divise III par a_{22}, on obtient III_1 dans le cas $a_{33}\neq 0$, et III_0 dans le cas contraire. □

5 Classification dans les plans complexes

Lorsque l'on travaille dans un plan affine complexe, on dit que l'on est en *situation complexe*, ou encore en *situation* $\mathbb{C}$. Dans ce contexte nous avons le

Théorème 44. *Classification en situation* $\mathbb{C}$. *Dans un plan affine complexe, pour toute courbe de degré deux, il existe un repère dans lequel la courbe admet une équation appartenant à l'un des cinq types suivants :*

[1] $x^2+y^2=1$
[2] $x^2+y^2=0$
[3] $y^2=2x$
[4] $y^2+1=0$
[5] $y^2=0$

De plus, aucune courbe ne peut avoir deux équations de types différents.

Démonstration.

1. D'après le théorème 43, la courbe admet dans un repère, une équation du type I_1, I_0, II, III_0 ou III_1. Par ailleurs, comme nous travaillons sur $\mathbb{C}$, nous savons que les coefficients (non nuls) A et B apparaissant dans l'équation possèdent une racine carrée que nous notons a et b respectivement. Discutons selon le type obtenu :
   - Type I_1. Dans ce cas on pose
     $$\begin{cases} x'=ax \\ y'=by \end{cases}$$
     (a et b sont non nuls) et on obtient une équation de type [1].
   - Type I_0. On fait comme au cas I_1 et on obtient une équation du type [2].
   - Type II. On pose $x'=Ax$ $(A\neq 0)$ et on obtient une équation du type [3].
   - Type III_1. On pose $y=ay'$ $(a\neq 0)$ et on obtient $Ay'^2+A=0$ que l'on simplifie par A (qui est non nul), ce qui donne une équation du type [4].
   - Type III_0. C'est une équation de type [5].
2. La dernière assertion vient du fait que chacune des cinq équations énoncées caractérise géométriquement la courbe. Notons $\mathcal{C}$ la courbe et discutons selon chaque type.
   - Type [1]. L'origine est l'unique centre de symétrie de $\mathcal{C}$ (voir propositions 20 et 22). De plus, $\mathcal{C}$ ne contient aucune droite. Prouvons-le en supposant que [1] contient une droite dont les équations paramétrées seraient
     $$\begin{cases} x=x_0+\ell t \\ y=y_0+m\,t \end{cases}$$
     On aurait alors pour tout $t\in\mathbb{R}$ l'égalité
     $$(x_0+\ell t)^2+(y_0+mt)^2=1$$
     Autrement dit, pour tout $t\in\mathbb{R}$,
     $$(\ell^2+m^2)\,t^2+2(x_0\,\ell+y_0\,m)t+x_0^2+y_0^2=1$$
     et dans ce cas,
     $$\begin{cases} \ell^2+m^2=0 \\ x_0\,\ell+y_0\,m=0 \\ x_0^2+y_0^2=1 \end{cases}$$

D'où $(\ell, m) = (0, 0)$, ce qui est absurde.

- Type [2]. Alors $\mathcal{C}$ est une paire de droites sécantes. En effet,

$$x^2 + y^2 = x^2 - (iy)^2 = (x - iy)(x + iy)$$

et on trouve les droites d'équation $y = ix$ et $y = -ix$.

- Type [3]. Alors $\mathcal{C}$ n'a pas de centre de symétrie. Pour le prouver il faut se rappeler la deuxième assertion de la proposition 22 : *si M est un centre de symétrie de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ alors soit $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est contenue dans une droite, soit M est un centre de $\mathcal{E}$.* Ainsi, l'équation n'étant pas centrale, il s'agit d'établir que $\mathcal{C}$ n'est contenue dans aucune droite. Ceci ne pose aucune difficulté puisque les points de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont sur la courbe et ne sont pas alignés.

- Type [4]. Alors $\mathcal{C}$ est une paire de droites parallèles distinctes. En effet,

$$y^2 + 1 = y^2 - i^2 = (y - i)(y + i).$$

et on trouve les droites $y = i$ et $y = -i$.

- Type [5]. Alors $\mathcal{C}$ est une (*double*) droite, la droite $y = 0$. □

La deuxième assertion de ce théorème signifie ceci :

Si $\mathcal{C}$ est une courbe complexe de degré deux et si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont des équations de $\mathcal{C}$ de degré deux, alors ces deux équations sont du même type.

Nous l'avons démontré en donnant une *caratérisation géométrique* à chaque type d'équation. Nous sommes encore loin de l'unicité de l'équation, mais nous avons franchi un pas important. Voici une première conséquence de ce résultat :

Proposition 45. *En situation $\mathbb{C}$, le centre d'une courbe de degré deux est bien définie.*

Rappelons qu'au paragraphe 3.3 c'est la notion de *centre d'une équation* qui a été définie.

Exercice 1. Calculer δ, Δ et les directions asymptotiques pour chaque équation du théorème 44.

Nous pouvons résumer les choses comme ceci :

Corollaire 46. *Dans un plan affine complexe, une courbe de degré deux est*

(a). *soit une courbe centrale ne contenant aucune droite (*[1]*),*

(b). *soit une courbe sans centre (*[3]*),*

(c). *soit une paire de droites éventuellement confondues (*[2], [4] *ou* [5]*) possédant une pleine droite de centres.*

Terminons ce paragraphe avec une définition.

Définition 47. *On appelle ovales les courbes de type (a), et paraboles (affines) les courbes de type (b). Les courbes de type (c) sont appelées coniques dégénérées.*

6 Classification dans les plans réel-complexes

Lorsque l'on travaille dans un plan affine *réel-complexe* (voir annexe 13), on dit que l'on travaille en *situation réelle-complexe*, ou encore en *situation* $(\mathbb{C},\mathbb{R})$. Un repère réel étant fixé, on dit d'une courbe algébrique qu'elle est *réelle* lorsqu'elle admet une équation algébrique à coefficients réels. Ce sont bien sûr ces courbes là qui nous intéressent.

D'après le paragraphe précèdent, la notion de centre d'une courbe est bien définie en situation $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$.

Théorème 48. *Classification en situation* ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$). *Dans un plan affine réel-complexe, pour toute courbe réelle de degré deux, il existe un repère réel dans lequel la courbe admet une équation appartenant à l'un des neufs types suivants :*

$$\begin{array}{ll} [1] & x^2+y^2-1=0 \\ [2] & x^2+y^2+1=0 \\ [3] & x^2+y^2=0 \\ [4] & x^2-y^2-1=0 \\ [5] & x^2-y^2=0 \\ [6] & y^2-2x=0 \\ [7] & y^2-1=0 \\ [8] & y^2+1=0 \\ [9] & y^2=0 \end{array}$$

De plus, aucune courbe ne peut avoir deux équations de types différents.

Démonstration.

1. Les coefficients de l'équation étant réels, on peut montrer qu'il existe un repère réel dans lequel $\mathcal{E}$ prend la forme I_1, I_0, II, III_1 ou III_0, avec des coefficients A et B réels (le lecteur peut le vérifier en reprenant mot pour mot les paragraphes 5, 4.2 et 4.3 et en veillant à ne faire que des changements de coordonnées réels). Dans ce qui suit a et b désignent la racine carrée réelle de $|A|$ et $|B|$, respectivement. Discutons maintenant selon le type de $\mathcal{E}$.

   - Type I_1. On pose
     $$x=\frac{x'}{a}$$
     ($a\neq 0$). On a alors
     $$x^2=\begin{cases} \frac{x'^2}{A} & \text{si } A>0 \\ -\frac{x'^2}{A} & \text{si } A<0 \end{cases}$$
     En effet, si $A>0$, $a^2=A$ et si $A<0$, $a^2=-A$. De même, on pose
     $$y=\frac{y'}{b}$$
     ($b\neq 0$) et on obtient des formules analogues pour y^2. Le tableau suivant montre ce que devient $\mathcal{E}$ par ce changement (on supprime les primes).

	$A>0$	$A<0$
$B>0$	$x^2+y^2=1$ [1]	$-x^2+y^2=1$
$B<0$	$x^2-y^2=1$ [4]	$-x^2-y^2=1$ [2]

     Notons que l'équation $-x^2+y^2=1$ devient [4] si on fait le changement
     $$\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$$

   - Type I_0. On fait comme au cas précèdent et on obtient [3] ou [5].
   - Type II. On pose
     $$\begin{cases} x=\frac{x'}{A} \\ y'=x \end{cases}$$
     et on obtient [6].
   - Type III_1. On pose
     $$\begin{cases} x=x' \\ y=ay' \end{cases}$$
     on obtient alors
     $$\pm Ay'^2+A=0$$

selon le signe de A, ce qui donne [7] ou [8] en simplifiant par A et en multipliant éventuellement par -1.

- Type III_0. Alors elle est du type [9].

2. La dernière assertion vient du fait que chacune de ces équations caractérise géométriquement la courbe.

- [1] définit une courbe dont la trace réelle (intersection avec le plan réel) est une ellipse affine, voir figure.

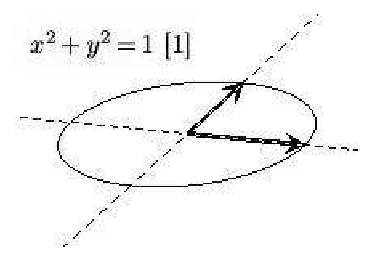


Figure 1. Ellipse affine.

- [2] définit une courbe dont la trace réelle est vide.
- [3] définit une paire de droites non réelles sécantes et conjuguées ($y=ix$ et $y=-ix$). La trace réelle se réduit au point origine.
- [4] définit une courbe dont la trace réelle est une hyperbole affine, voir figure.

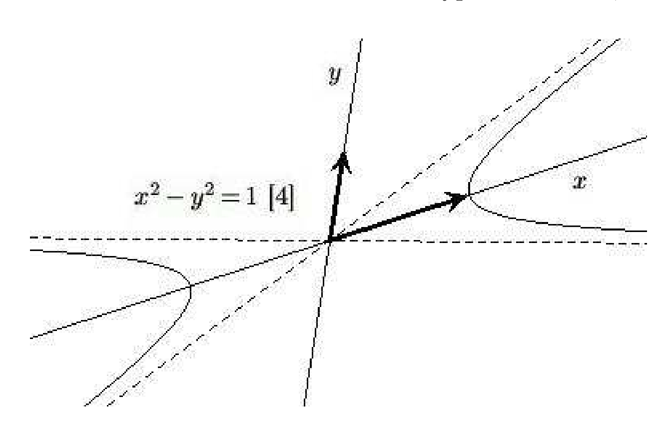


Figure 2. Hyperbole affine.

- [5] définit une paire de droites réelles sécantes ($y=x$ et $y=-x$).
- [6] définit une courbe dont la trace réelle est une parabole affine, voir figure.

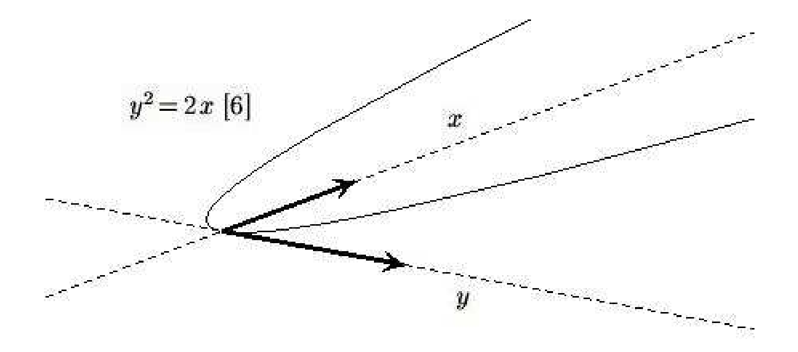


Figure 3. Parabole affine.

- [7] définit une paire de droites réelles parallèles et distinctes ($y=1$ et $y=-1$).
- [8] définit une paire de droites non réelles parallèles, distinctes et conjuguées ($y=i$ et $y=-i$).
- [9] définit une double droite réelle ($y=0$). □

On rappelle qu'une droite est *réelle* si elle admets une équation cartésienne à coefficients réels dans un repère réel. On remarque que les paires de droites apparaissant dans le théorème 48 sont conjuguées, sauf pour [5] et [7].

Définition 49. *Nom des courbes réelles de degré deux en situation réelle-complexe :*

[1] *ellipse (affine réelle)*
[2] *ellipse affine imaginaire*
[4] *hyperbole (affine réelle)*
[6] *parabole (affine réelle)*

Corollaire 50. *Dans un plan affine réel-complexe, une courbe réelle de degré deux est*

(a) *soit une ellipse affine (réelle* [1] *ou imaginaire* [2]*),*
(b) *soit une hyperbole affine (*[4]*),*
(c) *soit une parabole affine (*[6]*),*
(d) *soit une paire de droites,*

Pour les paires de droites, presque toutes les possibilités réelles/irréelles et disjointes/confondues/sécantes, sont réalisées :

irréelles sécantes	[3]
réelles sécantes	[5]
réelles disjointes	[7]
irréelles disjointes	[8]
réelles confondues	[9]

On notera que
(a) et (b) sont des courbes centrales,
(c) est une courbe sans centre,
(d) est une courbe avec une pleine droite de centres.

7 Unicité de l'équation

Nous allons étudier l'unicité en situation complexe : $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Fixons un repère $\mathfrak{R}$ et une courbe $\mathcal{C}$ de degré deux, et cherchons tous les uplets $(a_{ij})\in\mathbb{C}^6$ tels que l'équation

$$a_{11}\,x^2+2a_{12}\,xy+a_{22}\,y^2+2a_{13}\,x+2a_{23}\,y+a_{33}=0 \qquad (10)$$

définisse $\mathcal{C}$.

Chaque point $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de la courbe définit une équation linéaire vérifiée par les (a_{ij}), à savoir

$$x_0^2\,a_{11}+2x_0\,y_0\,a_{12}+y_0^2\,a_{22}+2x_0\,a_{13}+2\,y_0\,a_{23}+a_{33}=0$$

que l'on note $E(M)$. Notons qu'il y a 6 inconnues dans cette équation. Avant même d'aller plus loin, nous savons qu'il est vain d'espérer trouver 6 équations de ce type linéairement indépendantes. Cela impliquerait qu'il n'y ait qu'une solution (a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}) à notre problème, c'est à dire une équation unique pour $\mathcal{C}$. Or nous savons qu'en multipliant chaque a_{ij} par un même scalaire non nul, on obtient une nouvelle solution. Nous trouverons en fait cinq équations linéairement indépendantes. Notons au passage qu'étant donné un point M, nous n'avons besoin de fixer aucune courbe pour définir $E(M)$.

Définition 51. *On se donne m points $M_1,\ldots,M_m$. On dit que $M_1,\ldots,M_m$ sont indépendants si les équations $E(M_1),\ldots,E(M_m)$ associées sont linéairement indépendantes.*

Proposition 52. *Soit $\mathcal{C}$ une courbe de degré deux. Si $\mathcal{C}$ possède cinq points indépendants alors toutes les équations algébriques de degré deux de $\mathcal{C}$ (dans un même repère) sont deux à deux porportionnelles.*

Démonstration. On suppose que $M_1, ..., M_5$ sont cinq points indépendants de $\mathcal{C}$, autrement dit que les équations linéaires $E(M_1)$, ..., $E(M_5)$ sont indépendantes. Alors l'ensemble des solutions du système ainsi formé est une droite vectorielle (système linéaire de rang 5 à 6 inconnues), autrement dit, il n'y a qu'une solution $(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33})$ à multiplication par un scalaire près. □

Lemme 53. *Toute paire de droites (éventuellement confondues) est une courbe de degré deux.*

Démonstration. Pour trouver une équation de degré deux définissant une paire donnée de droites, il suffit de multiplier une équation cartésienne de l'une par une équation de l'autre. □

Lemme 54. *Soient a et b des paires de droites. Si $a \cap b$ est fini alors son cardinal est au plus 4.*

Démonstration. On note $a = a_1 \cup a_2$ et $b = b_1 \cup b_2$ où a_1, a_2, b_1 et b_2 sont des droites. On a alors $a \cap b = (a_1 \cap b_1) \cup (a_1 \cap b_2) \cup (a_2 \cap b_1) \cup (a_2 \cap b_2)$, et puisque $a \cap b$ est fini, chaque $a_i \cap b_j$ est constitué d'au plus un point. □

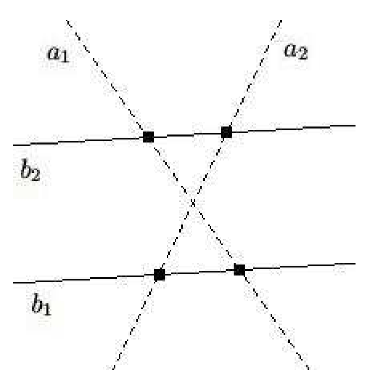


Figure 4. Intersection de deux « paires » dans le cas fini maximal.

Lemme 55. *Soient M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 des points du plan deux à deux distincts. Si aucune partie à quatre éléments de $\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$ n'est consituée de points alignés, alors M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 sont indépendants.*

Autrement dit, *si M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, sont dépendants alors quatre points parmi eux sont alignés.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant qu'ils sont dépendants. Une des cinq équations associées, disons $E(M_5)$, est alors combinaison linéaire des quatre autres. Par conséquent toute courbe de degré deux passant par M_1, M_2, M_3 et M_4, passe aussi par M_5. Soit $\mathcal{C}_1 = (M_1M_2) \cup (M_3M_4)$. C'est une courbe de degré deux, et donc $M_5 \in \mathcal{C}_1$. Même chose avec $\mathcal{C}_2 = (M_1M_3) \cup (M_2M_4)$, et on obtient $M_5 \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

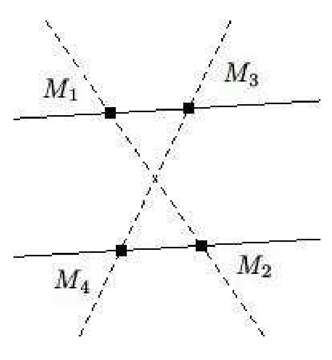


Figure 5. $\mathcal{C}_1$ en pointillés et $\mathcal{C}_2$ en trait plein.

Mais $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ contient déjà M_1, M_2, M_3 et M_4, donc d'après le lemme 54, deux droites de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ sont confondues. Si ces deux droites sont du même $\mathcal{C}_i$ alors M_1, M_2, M_3 et M_4 sont alignés et la démonstration est terminée. Supposons donc sans perte de généralité que $(M_1M_2) = (M_1M_3)$, autrement dit que M_1, M_2 et M_3 sont alignés. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par M_4. La courbe $(M_1M_2M_3) \cup \mathcal{D}$ qui est de degré 2 contient M_1, M_2, M_3 et M_4, donc elle contient aussi M_5. Soit $\mathcal{D}'$ une autre droite passant par M_4. Par le même raisonnement nous avons aussi $M_5 \in (M_1M_2M_3) \cup \mathcal{D}'$. Ceci implique clairement que M_5 appartient à $(M_1M_2M_3)$, d'où le résultat.

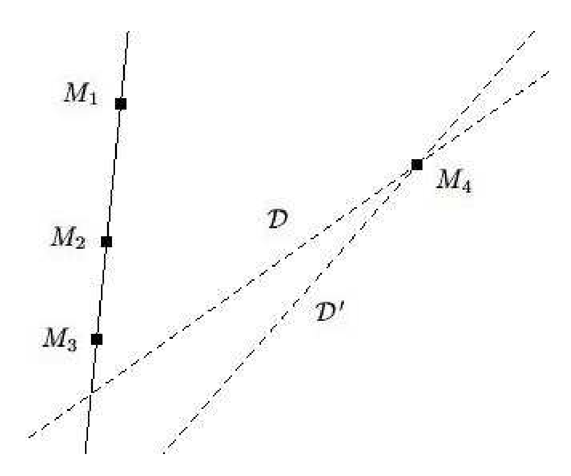


Figure 6. L'intersection de $(M_1M_2M_3) \cup \mathcal{D}$ et $(M_1M_2M_3) \cup \mathcal{D}'$ est composé de $(M_1M_2M_3)$, M_4 et de deux points : l'intersection de $(M_1M_2M_3)$ avec $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, respectivement. De plus M_5 appartient à cette intersection. Le fait que M_5 et M_4 soient distincts permet de conclure, puisqu'on peut faire bouger $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

□

Remarque 56. Si l'on n'est pas convaincu de l'appartenance de M_5 à la droite $(M_1M_2M_3)$, on peut faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\bigcap_{\mathcal{D} \ni M_4} \left[(M_1M_2M_3) \cup \mathcal{D} \right] &= (M_1M_2M_3) \cap \left(\bigcap_{\mathcal{D} \ni M_4} \mathcal{D} \right) \\ &= \{M_4\}\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème d'unicité.

Théorème 57. *Théorème d'unicité. Dans un plan affine complexe ou réel-complexe, il y a unicité (à coefficient de proportionnalité près) de l'équation de degré deux d'une courbe algébrique (dans un même repère). Autrement dit : si $F(x, y) = 0$ et $G(x, y) = 0$ sont des équations algébriques de degré deux définissant dans un même repère, la même courbe, alors $\exists k \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ tel que*

$$G(x, y) = kF(x, y).$$

En situation $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$, si $F(x, y) = 0$ et $G(x, y) = 0$ sont des équations réelles, il est clair que le coefficient de proportionnalité k est réel.

Démonstration. On se place en situation complexe et on se donne une courbe $\mathcal{C}$ de degré deux, et un repère $\mathfrak{R}$. Il s'agit, d'après le lemme 55, de trouver 5 points de $\mathcal{C}$ dont il soit impossible d'extraire 4 points alignés. On discute selon les trois cas possibles.

- Si $\mathcal{C}$ est un ovale ou une parabole ([1] ou [3]), on prend trois points M_1, M_2, M_3 deux à deux distincts. Il sont forcément non alignés. On complète avec deux autres points de la courbe et c'est terminé.
- Si $\mathcal{C}$ est une paire de droites distinctes ([2] ou [4]), il suffit de prendre trois points sur l'une et deux points sur l'autre.

- Si $\mathcal{C}$ est une (double) droite ([5]), on ne peut pas utiliser le lemme 55. Soit $F(x,\, y) = 0$ une équation de degré deux de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathfrak{R}$. D'après le théorème 44, il existe un repère $\mathfrak{R}'$ dans lequel cette équation devient

$$y'^2 = 0$$

où $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont les nouvelles coordonnées. Les formules de changement de coordonnées étant du type

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + x_0' \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + y_0' \end{cases}$$

on en déduit que l'équation $F(x, y) = 0$ s'écrivait en fait

$$(c_{21}x + c_{22}y + y_0')^2 = 0$$

où

$$c_{21}x + c_{22}y + y_0' = 0$$

est forcément une équation cartésienne de la droite $\mathcal{C}$. L'unicité de l'équation cartésienne (à coefficient multiplicatif près) prouve l'unicité de l'équation de degré deux de la courbe, dans $\mathfrak{R}$. □

Exercice 2. Traiter le cas où l'on travaille sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque de caractéristique différente de deux.

8 Classification dans un plan euclidien réel-complexe

Nous supposons ici que $\mathcal{P}$ est un plan affine réel-complexe dont la partie réelle admet une structure euclidienne. On dit alors que $\mathcal{P}$ est un *plan affine réel-complexe euclidien* (voir annexe 14). Ici c'est la partie réelle de la courbe qui nous intéresse, ainsi que ses équations réelles dans un repère orthonormé réel. On fixe donc un tel repère.

Proposition 58. *Si $\ell\colon m$ est une direction du plan, la direction $-m\colon \ell$ est l'unique direction orthogonale à $\ell\colon m$.*

Démonstration. Pour trouver les directions $x\colon y$ orthogonales à $\ell\colon m$, il faut résoudre l'équation

$$\ell x + m y = 0$$

Si $m \neq 0$, cette équation équivaut à $\frac{\ell}{m}x + y = 0$ et si $\ell \neq 0$, elle équivaut à $x + \frac{m}{\ell}y = 0$. Dans tous les cas on a une direction solution unique $-m\colon \ell$. □

Définition 59. *On dit que $\ell\colon m$ est une direction principale de l'équation si $\ell\colon m$ est réelle et conjuguée à sa direction orthogonale, $-m\colon \ell$.*

Il est facile de voir qu'une équation non centrale admet une paire de directions principales : il suffit de prendre

$$\ell\colon m = -a_{12} : a_{11} = a_{22} : -a_{12}$$

et sa direction orthogonale

$$-m\colon \ell = a_{11} : a_{12} = a_{12} : a_{22}$$

En effet, $-a_{12} : a_{11} = a_{22} : -a_{12}$ est la direction asymptotique (voir proposition 28) et elle est conjuguée à toutes les directions du plan, en particulier à la direction $a_{11} : a_{12} = a_{12} : a_{22}$. Mais qu'en est-il des équations centrales ?

Supposons que $\mathcal{E}$ est centrale et que $\ell\colon m$ est réelle. Il est clair que $\ell\colon m$ est principale si et seulement si

$$\begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & \ell \end{pmatrix} = 0$$

ce qui équivaut à

$$a_{12}\,\ell^2+(a_{22}-a_{11})\,\ell m-a_{12}\,m^2=0 \tag{11}$$

et on reconnaît une équation quadratique à deux inconnues. On a résolu ce type d'équations au paragraphe 3.4. Pour se ramener au cas déjà étudié, on pose

$$\begin{cases}\alpha_{11}=a_{12}\\ \alpha_{12}=\frac{a_{22}-a_{11}}{2}\\ \alpha_{22}=-a_{12}\end{cases}$$

et (11) équivaut à

$$\alpha_{11}\,\ell^2+2\alpha_{12}\,m\ell+\alpha_{22}\,m^2=0$$

mais attention, dans l'étude menée au paragraphe 3.4 nous avions écarté le cas où $\alpha_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{22}=0$. Il faudra le traiter maintenant.

Si $\alpha_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{22}=0$, toute direction du plan est solution, autrement dit, toute direction est principale. Remarquons que dans ce cas, $a_{12}=0$ et $a_{22}=a_{11}$, autrement dit, dans l'équation $\mathcal{E}$, les coefficients de x^2 et y^2 sont égaux et il n'y a pas de monome $a_{12}\,xy$. Ainsi $\mathcal{E}$ est de la forme

$$a_{11}\,x^2+a_{11}\,y^2+2a_{13}\,x+2a_{23}\,y+a_{33}=0$$

(avec $a_{11}\neq 0$), ce qui équivaut à

$$x^2+y^2+\frac{2a_{13}}{a_{11}}\,x+\frac{2a_{23}}{a_{11}}\,y+\frac{a_{33}}{a_{11}}=0$$

et on reconnaît l'équation d'un cercle. On comprends pourquoi toutes les directions sont principales !

Supposons maintenant que $(\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{22})\neq(0,\ 0,\ 0)$. On rappelle que le discriminant de l'équation quadratique est

$$\partial=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2=-\left(a_{12}^2+\frac{(a_{22}-a_{11})^2}{2}\right)$$

Ainsi, $\partial=0$ équivaut à

$$\begin{cases}a_{12}=0\\ a_{22}=a_{11}\end{cases}$$

et c'est justement le cas qui a été traité en premier. Supposons donc que $\partial\neq 0$. Dans ce cas

$$-\partial>0$$

(c'est la somme de deux carrés réels) et on note $\sqrt{-\partial}$ sa racine carrée. D'après le paragraphe 3.4, l'équation (11) admet exactement deux directions solutions, à savoir

$$\begin{cases}d_1=\frac{a_{11}-a_{22}}{2}+\sqrt{a_{12}^2+\frac{(a_{22}-a_{11})^2}{4}}:a_{12}=-a_{12}:\frac{a_{11}-a_{22}}{2}-\sqrt{a_{12}^2+\frac{(a_{22}-a_{11})^2}{4}}\\ d_2=\frac{a_{11}-a_{22}}{2}-\sqrt{a_{12}^2+\frac{(a_{22}-a_{11})^2}{4}}:a_{12}=-a_{12}:\frac{a_{11}-a_{22}}{2}+\sqrt{a_{12}^2+\frac{(a_{22}-a_{11})^2}{4}}\end{cases}$$

et on notera que $d_1\perp d_2$. Résumons.

Proposition 60. *Toute équation de degré deux admet au moins une paire de directions principales. En fait, hormis le cas du cercle, il y a exactement deux directions principales, d_1 et d_2 et si l'équation n'est pas centrale, l'une des deux est la direction singulière.*

Il découle de cette proposition que toute courbe réelle de degré deux admet un repère réel orthonormé dans lequel une de ses équations appartient à l'un des types suivants :

I_1	$Ax^2+By^2=1$
I_0	$Ax^2+By^2=0$
II	$y^2=2Ax$
III_1	$y^2+A=0$
III_0	$y^2=0$

avec A et B réels non nuls.

Pour le démontrer il suffit de refaire tout le travail des paragraphes 5, 4.2, 4.3 et 5 en prenant des axes réels conjugués *et* perpendiculaires. Il en découle le

Théorème 61. *Classification en situation réelle-complexe euclidienne. Dans un plan affine réel-complexe euclidien, pour toute courbe réelle de degré deux, il existe un repère réel orthonormé dans lequel la courbe admet une équation normalisée, c'est à dire une équation appartenant à l'un des neufs types suivants :*

$$\begin{array}{lll}
[1] & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \textit{avec } a\geqslant b>0 \\
[2] & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1 & \textit{avec } a\geqslant b>0 \\
[3] & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0 & \textit{avec } a\geqslant b>0 \textit{ et } \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1 \\
[4] & \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \textit{avec } a,b>0 \\
[5] & \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0 & \textit{avec } a\geqslant b>0 \textit{ et } \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1 \\
[6] & y^2=2px & \textit{avec } p>0 \\
[7] & y^2-b^2=0 & \textit{avec } b>0 \\
[8] & y^2+b^2=0 & \textit{avec } b>0 \\
[9] & y^2=0 &
\end{array}$$

Aucune courbe ne peut avoir deux équations de types différents. De plus l'équation normalisée est unique.

Au niveau de la trace réelle, on reconnaît
[1] une ellipse,
[4] une hyperbole,
[6] une parabole.

Remarque 62. Dire que l'équation normalisée de $\mathcal{C}$ est unique signifie que si $(F,\mathfrak{R})$ et $(F',\mathfrak{R}')$ sont des équations de $\mathcal{C}$ appartenant à la liste ci-dessus (avec $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ réels orthonormés), alors $F=F'$, bien qu'a priori les deux repères soient différents. A posteriori nous verrons qu'ils sont identiques à orientation des axes près.

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ une courbe de degré deux.

1. D'après ce qui précède, il existe un repère réel orthonormé où $\mathcal{C}$ admet une équation du type I_1, I_0, II, III_0 ou III_1. Discutons selon ces cinq cas en prenant soin de n'effectuer que des changements de coordonnées réels et *rectangulaires*[1].

   - Type I_1. On pose $a=\sqrt{\frac{1}{|A|}}$ et $b=\sqrt{\frac{1}{|B|}}$. On a $a,b>0$. Voici ce que devient l'équation I_1, selon les signes de A et B :

	$A>0$	$A<0$
$B>0$	(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	(2) $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
$B<0$	(3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	(4) $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

   Dans le premier cas on reconnaît [1], dans le deuxième on pose

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$$

1. Afin que le nouveau repère soit réel et orthonormé.

et on obtient [4], dans le troisième on reconnaît [4], et dans le quatrième, [2]. Dans les cas [1] et [2] on veille à ce que $a > b$, quitte à poser

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

- Type I_0. Tout d'abord on remarque que I_0 peut s'écrire

  $$Ax^2 + By^2 = 0$$

  ou

  $$Ax^2 - By^2 = 0$$

  avec $A, B > 0$ (il suffit de considérer les quatre cas possibles selon le signe de A et B et éventuellement multiplier par -1). On a alors $A + B \neq 0$. On divise l'équation obtenue par $A + B$ et on obtient (en écrivant encore A au lieu de $\frac{A}{A+B}$ et B au lieu de $\frac{B}{A+B}$)

  $$Ax^2 + By^2 = 0$$

  ou

  $$Ax^2 - By^2 = 0$$

  avec $A, B > 0$ et $A + B = 1$ (on vient de *normaliser* les coefficients A et B). Maintenant on fait comme au cas précèdent : on pose $a = \sqrt{\frac{1}{A}}$ et $b = \sqrt{\frac{1}{B}}$. L'équation $Ax^2 + By^2 = 0$ devient [3], et $Ax^2 - By^2 = 0$ devient [5]. On a bien $a, b > 0$ et

  $$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

  dans les deux cas.

- Type II. Si $A > 0$ on pose $p = A$, sinon, $p = -A$ et on fait le changement

  $$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

  Dans les deux cas on obtient [6].

- Type III_1. Si $A > 0$, on reconnaît [8] avec $b = \sqrt{A}$, et si $A < 0$, [7] avec $b = \sqrt{-A}$.

- Type III_0. On reconnaît [9].

2. Démontrons l'unicité du type selon la méthode habituelle.

   - [1] définit une ellipse (réelle).

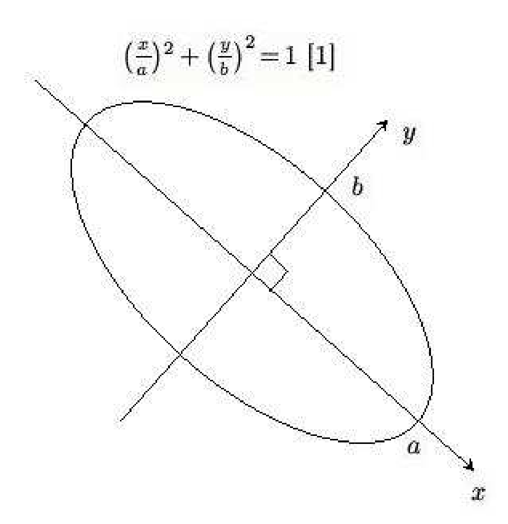


Figure 7. Illustration de [1].

- [2] définit une ellipse imaginaire. Cette courbe ne contient aucune droite et sa trace réelle est vide.
- [3] définit une paire de droites complexes, sécantes et conjuguées, à savoir les droites

$$y = \pm\, i\, \frac{b}{a}\, x$$

- [4] définit une hyperbole.

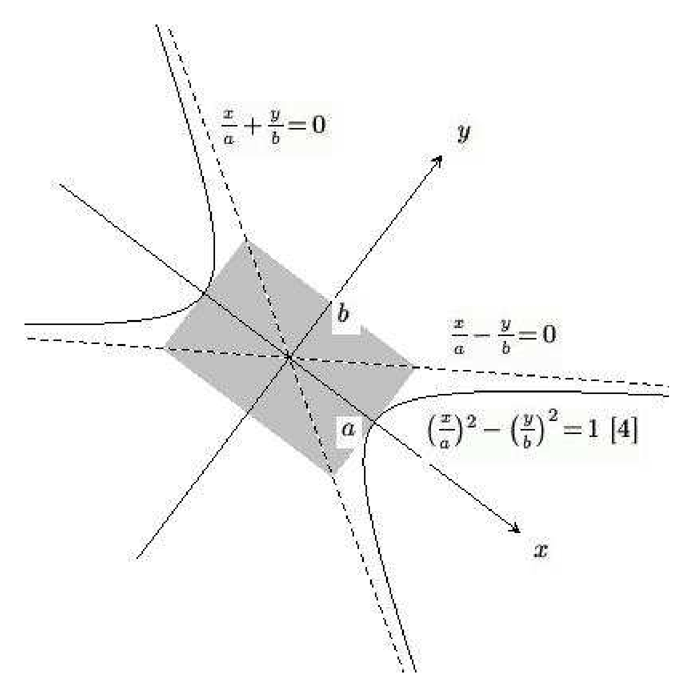


Figure 8. Illustration de [4].

- [5] définit une paire de droites réelles et sécantes, à savoir les droites

$$y = \pm\, \frac{b}{a}\, x$$

Figure 9. Illustration de [5].

- [6] définit une parabole.

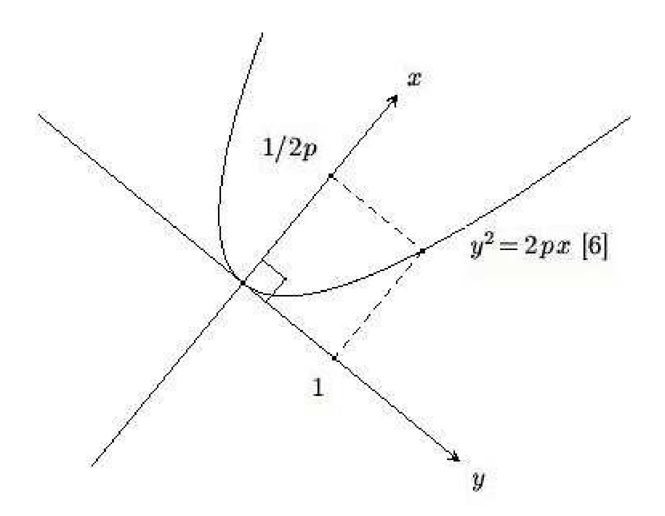
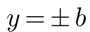


Figure 10. Illustration de [6].

- [7] définit une paire de droites réelles, parallèles et distinctes, à savoir les droites



$$y = \pm b$$

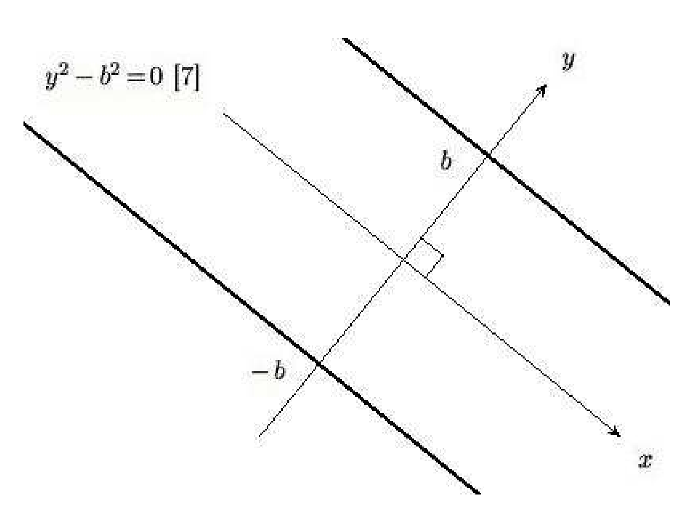


Figure 11. Illustration de [7].

- [8] définit une paire de droites complexes, parallèles, distinctes et conjuguées, à savoir les droites

$$y = \pm i b$$

- [9] définit une (double) droite réelle, à savoir la droite $y = 0$.

3. On termine en démontrant que si $\mathcal{C}$ possède deux équations normales $(F_1, \mathfrak{R}_1)$ et $(F_2, \mathfrak{R}_2)$ dans des repères réels et orthonormés, alors $F_1 = F_2$. Discutons selon le type.

   - Type [1], [2], [3], [4] ou [5]. Ici la courbe est centrale. Le cas du cercle étant trivial, on suppose que $\mathcal{C}$ n'en est pas un. Supposons sans perte de généralité que F_1 et F_2 sont de type [1] et s'écrivent

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

   et

$$\left(\frac{x'}{a'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b'}\right)^2 = 1$$

   respectivement, avec

$$a > b > 0 \tag{12}$$

et

$$a' > b' > 0 \tag{13}$$

Nous savons que le centre de $\mathcal{C}$ est l'origine de $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$. Nous savons également que la courbe ne possède que deux directions principales (voir démonstration de la proposition 60) à savoir les axes du repère. Par conséquent, $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ possèdent la même origine et les mêmes axes (rappelons que ces repères sont normés). Montrons que ces repères coïncident, à orientation des axes près. Si tel n'était pas le cas, c'est à dire si l'axe des abscisses de l'un était à l'orientation près, l'axe des ordonnées de l'autre, et vice et versa, $\mathcal{C}$ possèderait dans $\mathfrak{R}_1$ les équations $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ et $\left(\frac{x}{b'}\right)^2 + \left(\frac{y}{a'}\right)^2 = 1$, et le théorème 57 impliquerait $a = b'$ et $b = a'$, ce qui est absurde d'après (12) et (13). Signalons que dans le cas [4] l'absurdité est assurée par le second membre qui vaut 1. Mais revenons à $\mathcal{C}$. Nous avons pour $\mathcal{C}$ deux équations dans le même repère, à savoir $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ et $\left(\frac{x}{a'}\right)^2 + \left(\frac{y}{b'}\right)^2 = 1$. On en déduit que $a = a'$ et $b = b'$ (théorème 57 à nouveau). Signalons que pour le type [3] et [5] (second membre égal à zéro), le théorème 57 permet de conclure parce que la somme des coefficients de l'équation est normalisé à 1 :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

- Type [6], [7], [8] ou [9]. Ici la courbe n'est pas centrale et nous savons qu'elle ne possède qu'une direction asymptotique $\mathcal{D}$ et qu'une paires de directions principales : $\mathcal{D}$ et sa perpendiculaire $\mathcal{D}'$. De plus le diamètre conjugué à $\mathcal{D}'$ a pour équation $y = 0$ dans $\mathfrak{R}_1$ et $y' = 0$ dans $\mathfrak{R}_2$ (on les calcule à partir de l'équation), ce qui prouve que les deux repères ont le même axe des abscisses, à orientation près). Dans le cas [6] (la parabole) nous possédons une information supplémentaire : l'origine du repère de l'équation appartient à la courbe. On retrouve donc l'origine par intersection de l'axe des abscisses et de la courbe et nous voyons que les deux repères $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ ont la même origine et les mêmes axes. Dans tous les cas il est clair (grâce au théorème 57) que F_1 et F_2 sont égaux.

□

De la partie 3 de cette démonstration découle la

Proposition 63. *Soit $\mathcal{C}$ une courbe admettant dans un repère réel orthonormé $\mathfrak{R}$, une équation* normalisée $F(x, y) = 0$ *de n'importe quel type sauf le* [7] $y^2 - b^2 = 0$, *le* [8] $y^2 + b^2 = 0$ *et le* [9] $y^2 = 0$. *Le repère $\mathfrak{R}$ est alors l'unique repère réel orthonormé (à orientation des axe près) dans lequel $\mathcal{C}$ a pour équation $F(x, y) = 0$. Dans les cas* [7], [8] *et* [9], *le fait de faire glisser l'origine le long de l'axe des abscisses ne change pas l'équation.*

9 Courbes projectives de degré deux

Dans cette section $\mathfrak{P}$ est un plan projectif complexe, éventuellement affine, éventuellement réel-complexe (voir annexe 15). Nous proposons ici de définir la notion de courbe de degré deux et d'en donner une classification.

9.1 Définition

Définition 64. *Une courbe projective algébrique de degré deux est un sous-ensemble de $\mathfrak{P}$ défini par une équation homogène de degré deux (dans un système de coordonnées homogènes).*

Rappellons qu'une *équation homogène de degré deux* en X, Y et Z est une équation de la forme

$$a_{11} X^2 + 2a_{12} XY + a_{22} Y^2 + 2a_{13} XZ + 2a_{23} YZ + a_{33} Z^2 = 0$$

Exercice 3. Montrer qu'un changement de coordonnées homogènes ne change pas le degré d'une équation algébrique homogène. Ceci justifie la défintion précèdente.

Nous proposons ici de classifier les courbes de degré deux dans les situations suivantes :

- plan projectif *affine* réel-complexe,
- plan projectif réel-complexe,
- plan projectif complexe.

Les cas du *plan projectif affine complexe* et *plan projectif euclidien réel-complexe* sont laissés en exercice. Nous traitons la première situation en remarquant qu'un *plan projectif affine* peut être vu comme la *projectivisation* d'un plan affine, tout simplement.

9.2 Projectivisation d'une courbe

Ici $\mathfrak{P}$ est la projectivisation d'un plan affine $\mathcal{P}$. Ce plan est muni d'un repère $\mathfrak{R}$. Soit $\mathcal{C}$ une courbe algébrique de degré 2 de $\mathcal{P}$ d'équation

$$F(x, y) = 0$$

où

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

On munit $\mathfrak{P}$ du système de coordonnées canonique $(X\colon Y\colon Z)$ associé à $\mathfrak{R}$.

On peut transformer $F(X, Y)$ en un polynome $G(X, Y, Z)$ homogène de degré deux en multipliant chaque monome de $F(X, Y)$ de degré 0 ou 1 par Z^2 ou Z, respectivement. On obtient

$$G(X, Y, Z) = a_{11}\,X^2 + 2a_{12}\,XY + a_{22}\,Y^2 + 2a_{13}\,XZ + 2a_{23}\,YZ + a_{33}\,Z^2$$

Notons qu'on peut faire de même avec un polynome $F(X,\,Y)$ de degré 1 (cas $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$) ou de degré 0 (cas $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = 0$ et $a_{33} \neq 0$). On obtiendrait alors

$$G(X, Y, Z) = 2a_{13}\,XZ + 2a_{23}\,YZ + a_{33}\,Z^2$$

dans le premier cas, et

$$G(X, Y, Z) = a_{33}\,Z^2$$

dans le second.

Définition 65.

1. *La projectivisation d'ordre deux d'une équation*

$$a_{11}\,x^2 + 2a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2a_{13}\,x + 2a_{23}\,y + a_{33} = 0$$

de degré 0,1 *ou* 2*, est l'équation de degré 2*

$$a_{11}\,X^2 + 2a_{12}\,XY + a_{22}\,Y^2 + 2a_{13}\,XZ + 2a_{23}\,YZ + a_{33}\,Z^2 = 0$$

2. *La projectivisation d'ordre deux d'une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ est la courbe de* $\mathrm{Proj}(\mathcal{P})$ *obtenue en projectivisant l'équation de $\mathcal{C}$. On note* $\mathrm{Proj}(\mathcal{C})$ *cette courbe.*

L'item 2 de cette définition est justifiée par le fait que si des équations $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont liées par un changement de repère, alors la projectivisation de ces deux équations définissent la même courbe projective. Plus précisément, supposons que $F(x, y) = 0$ et $F'(x', y') = 0$ sont liées par un changement de repère sur $\mathcal{P}$. Alors ce changement de repère induit un changement sur les coordonnées homogènes. On pourra lire les formules de changement de coordonnées canoniques à l'annexe 15.6. On voit facilement que si on opère ce changement sur la projectivisation de $\mathcal{E}$, $G(X, Y, Z) = 0$, on obtient exactement la projectivisation $G'(X', Y', Z') = 0$ de $\mathcal{E}'$.

Notons un cas particulier : si l'on projectivise à l'ordre deux la droite d'équation

$$ax + by + c = 0$$

on obtient la paire de droites projectives d'équation

$$aXZ + bYZ + cZ^2 = 0$$

En revanche, si l'on projectivise à l'ordre un cette même droite, on obtient la droite projective d'équation

$$aX + bY + cZ = 0$$

Notons au passage que l'on peut projectiviser à l'ordre deux la *courbe vide* d'équation

$$a_{33} = 0$$

où $a_{33} \neq 0$, et que cela donne la courbe projective non vide d'équation

$$a_{33}\, Z^2 = 0$$

(on reconnaît la droite des *points à l'infini*).

Soit $\mathcal{C}$ une courbe de degré deux. Les points *ordinaires* de Proj($\mathcal{C}$) sont les points de $\mathcal{C}$, tout simplement. En effet, les points ordinaires sont caractérisés par la *pseudo-équation*

$$Z = 1$$

plus rigoureusement, ils sont caractérisés par l'inégalité

$$Z \neq 0$$

Les points *à l'infini* de Proj($\mathcal{C}$) correspondent aux directions asymptotiques de $\mathcal{C}$. En effet, ce sont les points tels que

$$Z = 0$$

or un point de coordonnées $X\!:\!Y\!:\!0$ appartient à la courbe si et seulement si

$$a_{11}\, X^2 + 2a_{12}\, XY + a_{22}\, Y^2 = 0$$

et on reconnaît l'équation quadratique (8) caractérisant les directions asymptotiques de $\mathcal{C}$.

Proposition 66. *Toute courbe algébrique projective de degré deux s'obtient par projectivisation à l'ordre deux d'une courbe algébrique affine de degré zéro, un ou deux.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective de degré deux. Cette courbe possède une équation du type

$$a_{11}\, X^2 + 2a_{12}\, XY + a_{22}\, Y^2 + 2a_{13}\, XZ + 2a_{23}\, YZ + a_{33}\, Z^2 = 0$$

avec $(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, et on reconnaît la projectivisation à l'ordre deux de l'équation

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

qui est de degré 0,1 ou 2 ; elle ne peut être de degré $-\infty$ puisque le uplet $(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}$, $a_{33})$ n'est pas nul. □

9.3 Classification dans un plan projectif affine réel-complexe

Nous supposons ici que $\mathfrak{P}$ est la projectivisation d'un plan affine réel-complexe $\mathcal{P}$. Ici nous n'étudions que les courbes projectives de degré deux possédant une équation réelle dans un système de coordonnées réel canonique. On les appelle courbes réelles. On lira la définition de « système de coordonnées canonique » à l'annexe 15, paragraphe 15.6.

Définition 67. *On appelle partie affine d'une courbe projective, l'ensemble de ses points ordinaires, et partie idéale, l'ensemble de ses points idéaux (points à l'infini).*

Nous avons montré au paragraphe précèdent que les partie idéale de la courbe est constitué des directions asymptotiques de la courbe affine associée. Il suffit d'appliquer la proposition 66 au théorème 48 pour avoir le

Théorème 68. *Classification dans le cas projectif affine réel-complexe. Dans un plan projectif affine réel-complexe, pour toute courbe réelle de degré deux, il existe un système de coordonnées homogènes canonique et réel pour lequel la courbe admet une équation appartenant à l'un des onze types suivants*

$$
\begin{array}{rl}
[1] & X^2+Y^2-Z^2=0\\
[2] & X^2+Y^2+Z^2=0\\
[3] & X^2+Y^2=0\\
[4] & X^2-Y^2-Z^2=0\\
[5] & X^2-Y^2=0\\
[6] & Y^2-2XZ=0\\
[7] & Y^2-Z^2=0\\
[8] & Y^2+Z^2=0\\
[9] & Y^2=0\\
[10] & YZ=0\\
[11] & Z^2=0
\end{array}
$$

Aucune courbe ne peut avoir deux équations de types différents et l'équation d'une courbe dans un système de coordonnées fixé est unique, à multiplication par un scalaire près.

Démonstration.

1. Nous savons que toute courbe projective de degré deux est de la forme Proj($\mathcal{C}$) où $\mathcal{C}$ est soit une *courbe vide* de degré 0, soit une droite affine, soit une courbe affine de degré deux. Nous allons discuter selon ces trois possibilités.

   - $\mathcal{C}$ est une courbe vide de degré 0. Alors une de ses équations est

     $$1=0$$

     L'équation de Proj($\mathcal{C}$) est alors $Z^2=0$, c'est à dire [11].

   - $\mathcal{C}$ est une droite. Il existe alors un repère réel dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ est $y=0$. L'équation de Proj($\mathcal{C}$) est alors $YZ=0$, c'est à dire [10].

   - $\mathcal{C}$ est courbe de degré deux. Alors $\mathcal{C}$ possède une équation dont le type est décrit par le théorème 48. Il y a neuf types dans ce théorème numérotés de [1] à [9]. Nous les noterons $[1_{48}]$, $[2_{48}]$, etc. pour ne pas les confondre avec les types du théorème 68. On remarque que pour tout $i\in\{1,\dots,9\}$, la projectivisation de l'équation $[i_{48}]$ est l'équation $[i]$ du théorème 68.

2. Montrons qu'aucune courbe ne peut avoir deux équations de types différents en donnant une caractérisation géométrique à chaque type.

   - [1] définit une courbe dont la partie affine est une ellipse réelle.
   - [2] définit une courbe dont la partie affine est une ellipse imaginaire.
   - [3] définit une courbe dont la partie affine est une paire de droites irréelles sécantes et conjuguées deux à deux : $y=ix$ et $y=-ix$.
   - [4] définit une courbe dont la partie affine est une hyperbole (réelle).
   - [5] définit une courbe dont la partie affine est une paire de droites réelles sécantes : $y=x$ et $y=-x$.
   - [6] définit une courbe dont la partie affine est une parabole (réelle).
   - [7] définit une courbe dont la partie affine est une paire de droites réelles parallèles et distinctes : $y=1$ et $y=-1$.
   - [8] définit une courbe dont la partie affine est une paire de droites irréelles parallèles, distinctes et conjuguées : $y=i$ et $y=-i$.
   - [9] définit une courbe dont la partie affine est une paire de droites réelles confondues ($y=0$) et dont la partie idéale se réduit à un point, le point correspondant à la direction $y=0$.

- [10] définit une courbe dont la partie affine est la droite d'équation $y = 0$ et la partie idéale est la *droite des points à l'infini* (même partie affine que [9] mais partie idéale différente).
- [11] définit une courbe dont la partie affine est vide et la partie idéale est la droite des points à l'infini (cette courbe est une paire de droites projectives confondue).

3. L'unicité à proportionnalité près de l'équation de degré deux dans un système de coordonnées donné vient de l'*unicité* dans le cas affine réel-complexe en degré deux (théorème 57), degré un et degré zéro. □

Exercice 4. Donner la classification des courbes projectives de degré deux dans les situations suivantes :

1. un plan projectif affine complexe.
2. un plan projectif affine où la partie affine est réelle-complexe euclidienne.

9.4 Classification dans un plan projectif réel-complexe

Soit $\mathfrak{P}$ un plan projectif réel-complexe. On rappelle que le choix d'une droite projective $\mathfrak{D}$ confère à $\mathfrak{P}$ une structure affine : la partie affine de $\mathfrak{P}$ est posée égale à $\mathfrak{P}\backslash\mathfrak{D}$, et la droite des points à l'infini est posée égale à $\mathfrak{D}$, tout simplement. On en déduit le

Théorème 69. *Classification dans le cas projectif réel-complexe. Dans un plan projectif réel-complexe, pour toute courbe réelle de degré deux, il existe un système de coordonnées homogènes réel pour lequel la courbe admet une équation appartenant à l'un des cinq types suivants*

$$\begin{array}{ll} [1] & X^2+Y^2-Z^2=0 \\ [2] & X^2+Y^2+Z^2=0 \\ [3] & X^2-Y^2=0 \\ [4] & X^2+Y^2=0 \\ [5] & X^2=0 \end{array}$$

Aucune courbe ne peut avoir deux équations de types différents et l'équation d'une courbe dans un système de coordonnées fixé est unique, à multiplication par un scalaire près.

Démonstration.

1. Soit $\mathcal{C}$ une courbe de degré deux. On munit $\mathfrak{P}$ d'une structure affine en choisissant une droite projective. D'après le théorème 68, la courbe $\mathcal{C}$ possède une équation du type $[1_{68}]$,...,$[11_{68}]$ dans un système réel de coordonnées homogènes. Discutons selon ces 11 possibilités.
   - Tout d'abord, nous remarquons que $[1_{68}]$, $[2_{68}]$, $[3_{68}]$ et $[5_{68}]$ sont respectivement équivalentes aux équations [1], [2], [4] et [3].
   - Type $[4_{68}]$. On multiplie $[4_{68}]$ par -1, on pose
     $$\begin{cases} X'=Z \\ Y'=Y \\ Z'=X \end{cases}$$
     et on obtient [1].
   - Type $[6_{68}]$. On pose
     $$\begin{cases} X=Y'+Z' \\ Y=X' \\ Z=\frac{Z'-Y'}{2} \end{cases}$$
     et on obtient [1].
   - Type $[7_{68}]$. On multiplie par -1, on pose
     $$\begin{cases} X'=Z \\ Y'=Y \\ Z'=X \end{cases}$$
     et on obtient [3].

- Type $[8_{68}]$. On pose
$$\begin{cases} X' = Z \\ Y' = Y \\ Z' = X \end{cases}$$
et on obtient [4].
- Type $[9_{68}]$. On pose
$$\begin{cases} X' = Y \\ Y' = X \\ Z' = Z \end{cases}$$
et on obtient [5].
- Type $[10_{68}]$. On pose
$$\begin{cases} X = X' \\ Y = X' - Y' \\ Z = X' + Y' \end{cases}$$
et on obtient [3].
- Type $[11_{68}]$. On pose
$$\begin{cases} X' = Z \\ Y' = Y \\ Z' = X \end{cases}$$
et on obtient [5].

2. Montrons qu'aucune courbe ne peut avoir deux équations de type différent. Notons $\mathcal{P}$ le plan affine obtenu ne retirant la droite projective $Z = 0$.
   - [1] définit une courbe dont la partie réelle coupe $\mathcal{P}$ le long d'une ellipse affine.
   - [2] définit une courbe dont la partie réelle ne rencontre pas $\mathcal{P}$.
   - [3] définit deux droites projectives réelles, les droites $X + Y = 0$ et $X - Y = 0$. La partie réelle de la courbe coupe $\mathcal{P}$ le long de deux droites sécantes.
   - [4] définit deux droites projectives complexes, les droites $X + iY = 0$ et $X - iY = 0$. La partie réelle de la courbe coupe $\mathcal{P}$ en l'origine.
   - [5] définit une double droite projective réelle.
3. L'unicité de l'équation provient de l'unicité dans le cas affine. Pour se ramener au cas affine il suffit de retirer une droite projective, par exemple la droite $Z = 0$. Un point ordinaire de coordonnées $(X\colon Y\colon Z)$ correspond alors au point du plan affine de coordonnées de $\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$. □

Cette classification unifie d'une certaine manière les coniques réelles. En effet, si $\mathcal{C}$ est la courbe d'équation [1] et si $\mathfrak{D}$ est une droite projective, alors la trace de $\mathcal{C}$ sur le plan affine obtenu en retirant $\mathfrak{D}$ est :

– une ellipse, si $\mathfrak{D}$ ne rencontre pas la partie réelle de $\mathcal{C}$,
– une parabole, si $\mathfrak{D}$ rencontre la partie réelle de $\mathcal{C}$ en un seul point (point de tangence en l'occurence),
– une hyperbole, si $\mathfrak{D}$ rencontre la partie réelle de $\mathcal{C}$ en deux points.

Il existe beaucoup d'autres propriétés unifiant les coniques. on peut par exemple,

– les définir géométriquement (avec directrice et excentricité), voir [6] ou [1],
– les définir comme la section d'un cône par un plan : voir [5] (théorèmes belges).

La figure ci-dessous montre une courbe du plan projectif réel $\mathfrak{P} = D_0(\mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ est un espace affine réel de dimension 3. On y montre la courbe telle qu'elle apparaît dans $\mathcal{A}$. N'oublions pas que les éléments de $\mathfrak{P}$ sont des droites, et donc chaque point de $\mathcal{C}$ correspond à une droite de $\mathcal{A}$.

On appelle fission de $\mathcal{C}$ la partie de $\mathcal{A}$ obtenue en faisant l'union de toutes ses droites :
$$f(\mathcal{C}) = \bigcup_{d \in \mathcal{C}} d$$

On munit $\mathcal{A}$ d'un repère et on donne une structure affine à $\mathfrak{P}$ en considérant le plan π d'équation $z=1$. Le lecteur notera que $f(\mathcal{C})$ est une surface de $\mathcal{A}$ dont l'intersection avec π n'est autre que la partie affine de $\mathcal{C}$. La partie affine nous apparaît ici comme une hyperbole, mais si on avait choisi différemment le plan π, on aurait pu tout aussi bien obtenir une ellipse ou une parabole.

Exercice 5. Les théorèmes belges affirment que toute conique réelle est la section d'un cône par un plan. Démontrer ce théorème en utilisant le plan projectif.

On voit bien sur la figure que les asymptotes de la partie affine de $\mathcal{C}$, à savoir les droites de π d'équation $x=0$ et $y=0$ (π est muni du repère montré sur la figure) correspondent aux droites $\{x=0 \text{ et } z=0\}$ et $\{x=0 \text{ et } z=0\}$ de $\mathcal{A}$ qui ne sont autres que les points de $\mathcal{C}$ à l'infini !

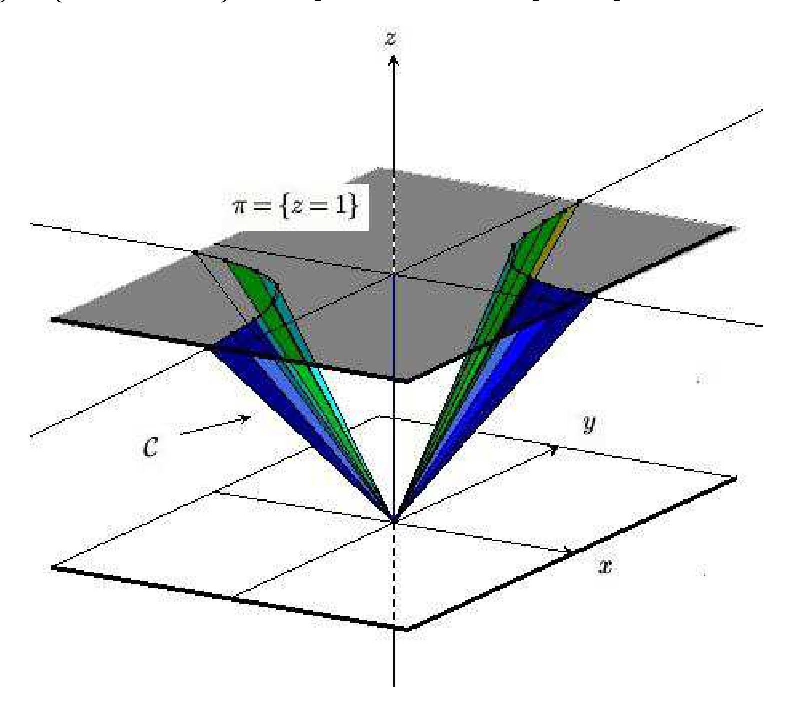


Figure 12. Les points de la courbe projective $\mathcal{C}$ sont des droites de l'espace $\mathcal{A}$. La figure montre $\mathcal{C}$ mais c'est $f(\mathcal{C})$ que l'on voit !

La projectivisation apporte encore une autre unification des coniques. Alors que dans le plan réel,

- l'ellipse est une courbe compacte et connexe (elle est bornée et d'un seul tenant),
- l'hyperbole n'est ni compacte ni connexe (elle est constitiée de deux branches),
- et la parabole est connexe mais non compacte,

la projectivisation de ces trois courbes donne une courbe compacte et connexe. Pour se convaincre de la connexité, le lecteur pourra par exemple, suivre simultanément sur la figure ci-dessus un point M sur la partie affine de la courbe, et son alter ego (OM). Il remarquera alors que lorsque M « atteint » l'infini, (OM) est une direction asymptotique (et donc cette droite (OM) en tant qu'élément de $D_0(\mathcal{A})$ appartient encore à la courbe). On poursuit alors le chemin en quittant « l'infini » pour revenir par l'autre branche. On aura ainsi parcouru toute la courbe sans faire de sauts.

9.5 Classification dans un plan projectif complexe

Théorème 70. *Dans un plan projectif complexe, pour toute courbe de degré deux, il existe un système de coordonnées homogènes pour lequel la courbe admet une équation appartenant à l'un des trois types suivants*

$$[1] \quad X^2+Y^2+Z^2=0$$
$$[2] \quad X^2+Y^2=0$$
$$[3] \quad X^2=0$$

Aucune courbe ne peut avoir deux équations de type différent et l'équation d'une courbe dans un système de coordonnées fixé est unique, à multiplication par un scalaire près.

Démonstration. Soit on se sert de la classification des courbes de degré deux dans un plan projectif affine complexe, et on s'inspire du passage du théorème 68 au théorème 69 (passage du cas affine au cas non affine), soit on munit le plan projectif ambient d'une structure réelle-complexe en fixant une partie réelle[2] (passage du cas réel-complexe au cas complexe). Dans le second choix, il suffit de traiter chaque équation donnée par le théorème 69. Pour l'équation $[1_{69}]$ $X^2+Y^2-Z^2=0$, par exemple, on pose $X'=X$, $Y'=Y$ et $Z'=iZ$... □

On notera que [3] définit une double droite projective, [2] une paire de droites projectives distinctes, et [1] une « belle » courbe.

10 Epilogue

La méthode utilisée ici n'utilise pas les théorèmes de réduction des formes bilinéaires symétriques. L'un de ces théorèmes (la loi d'inertie de Sylvester) affirme que toute forme quadratique q sur $\mathbb{R}^2$ s'écrit

$$\begin{array}{ll} 1) & q(x,y)=x^2+y^2 \\ 2) & q(x,y)=-x^2-y^2 \\ 3) & q(x,y)=x^2-y^2 \\ 4) & q(x,y)=x^2 \end{array}$$

pour un système $(x,\ y)$ de coordonnées sur $\mathbb{R}^2$. On peut utiliser ce résultat pour trouver une base sur laquelle l'équation de $\mathcal{C}$ va se simplifier. On montre que si q est de la forme 1) par exemple, la partie réelle de $\mathcal{C}$ est soit vide, soit un point, soit une ellipse. Cette façon de procéder est décrite dans l'appendice A.8 de [4]. Elle n'est pas à la portée d'un lycéen mais elle a le mérite de donner les raisons profondes qui font que toute courbe de degré deux est soit une conique, soit une paire de droites. On espère que ceci servira de motivation à nos lecteurs pour étudier la théorie des formes bilinéaires et quadratiques. On peut les étudier dans [4] ou [3].

11 Annexes A : positions relatives d'une droite et d'une courbe de degré deux

Pour trouver les points d'intersection d'une droite $\mathcal{D}$ et d'une courbe $\mathcal{C}$ de degré deux, on utilise des équations paramétrées de la droite

$$\begin{cases} x=x_0+t\ell \\ y=y_0+tm \end{cases} \tag{14}$$

et une équation de la courbe :

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

Ensuite, dans l'équation de $\mathcal{C}$, on remplace x et y par les expressions données en (14). On obtient alors une équation d'inconnue t de degré deux appelée *équation du paramétre* :

$$at^2+bt+c=0$$

Un simple calcul montre que

$$\begin{cases} a=(\ \ell\ \ m\ )\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} \\ b=2(\ \ell\ \ m\ )\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}\right] \\ c=F(x_0,y_0)=a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33} \end{cases}$$

Il en découle la

2. Il suffit pour cela de fixer un système de coordonnées.

Proposition 71.

1. *La direction d'une droite $\mathcal{D}$ est asymptotique pour $\mathcal{E}$ si et seulement si l'équation du paramètre associée à $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ est de degré au plus 1.*
2. *Si la direction de $\mathcal{D}$ est asymptotique, il y a trois possiblités :*
   - $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}(\mathcal{E})$ *est un point,*
   - $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}(\mathcal{E}) = \varnothing$,
   - $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Dans cet énoncé nous parlons « de l'équation du paramètre associée à $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ » alors qu'en vérité nous devrions parler de « l'équation du paramètre associée au système (14) et à $\mathcal{E}$ ».

Démonstration. La première assertion découle directement de la définition d'une direction asymptotique. La deuxième assertion découle du nombre de racines d'un polynome de degré au plus 1. Si $b \neq 0$, on a $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}(\mathcal{E})$ est un point. Si $b = 0$ et $c \neq 0$, on a $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}(\mathcal{E}) = \varnothing$. Si $b = c = 0$, on a $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$. □

Exercice 6. Montrer en situation réelle, qu'une droite de direction asymptotique qui ne rencontre pas la courbe est une asymptote.

Exercice 7. Montrer que pour une courbe centrale en situation réelle, il y a trois possiblités pour une droite de direction non asymptotique : soit la droite ne rencontre pas la courbe, soit elle rencontre la courbe en deux points distincts, soit elle est tangente à la courbe. Autrement dit, les droites tangentes à une courbe centrale sont celles pour lesquelles l'*équation du paramètre* admet une solution double.

12 Annexe B : à propos du diamètre conjugué à une direction

A l'annexe 11 nous avons défini l'*équation du paramètre* associée à une droite $\mathcal{D}$ et une équation $\mathcal{E}$ de degré deux et établi un lien avec les directions asymptotiques. Voici maintenant un lien entre cette équation et le diamètre conjugué à une direction.

Proposition 72. *La direction d'une droite $\mathcal{D}$ est régulière par rapport à $\mathcal{E}$ si et seulement si le coefficient b de l'équation du paramètre associée à $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ n'est pas nul. De plus, si tel est le cas, l'équation du diamètre conjugué à la direction de $\mathcal{D}$ est donnée par $b = 0$.*

Bien que la démonstration soit triviale, cet énoncé mérite une explication. On a vu à l'annexe précèdente que b est fonction de ℓ, m, x_0 et y_0 où $\ell : m$ est la direction de $\mathcal{D}$, et (x_0, y_0) les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}$,

$$b = b(\ell, m, x_0, y_0)$$

La proposition 72 dit que si dans l'expression donnant b on remplace x_0 et y_0 par les indéterminées x et y respectivement, on obtient (en écrivant $b = 0$) l'équation de $\operatorname{diam}(\ell : m)$:

$$b(\ell, m, x, y) = 0$$

Voici maintenant une caractérisation géométrique de $\operatorname{diam}(\ell : m)$. On rappelle que $\operatorname{diam}(\ell : m)$ n'est définie que lorsque $\ell : m$ est régulière.

Proposition 73. *On se donne une direction régulière $\ell : m$.*

1. *Si $\ell : m$ est une direction asymptotique, alors $\operatorname{diam}(\ell : m)$ a pour direction $\ell : m$ et*
   - *soit* $\operatorname{diam}(\ell : m)$ *ne rencontre pas la courbe (on dit que c'est une asymptote)*
   - *soit* $\operatorname{diam}(\ell : m) \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$.
2. *Si $\ell : m$ n'est pas une direction asymptotique alors*
   - *les milieux des segments $[M_1 M_2]$ obtenus en coupant $\mathcal{C}$ par les droites de direction $\ell : m$ appartiennent à* $\operatorname{diam}(\ell : m)$,

- *et réciproquement, si $M_0 \in \mathrm{diam}(\ell : m)$ et la droite de direction $\ell : m$ passant par M_0 coupe $\mathcal{C}$ en deux points M_1 et M_2, alors M_0 est le milieu de $[M_1 M_2]$.*

Démonstration.

1. On suppose que $\ell : m$ est une direction asymptotique de $\mathcal{E}$. La direction conjuguée à $\ell : m$ est $\ell : m$, et par conséquent $\mathrm{diam}(\ell : m)$ a pour direction $\ell : m$. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathrm{diam}(\ell : m)$. Des équations paramétrées de $\mathrm{diam}(\ell : m)$ sont

$$\begin{cases} x = x_0 + t\ell \\ y = y_0 + tm \end{cases} \tag{15}$$

et l'équation du paramètre associée à $((15), \mathcal{E})$ est

$$bt + F(x_0, y_0) = 0$$

car d'après la proposition 71,

$$a = \begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} = 0$$

D'après la proposition 72, si $M_0 \in \mathrm{diam}(\ell : m)$, alors $b = 0$, et donc l'équation du paramètre équivaut à $F(x_0, y_0) = 0$, d'où deux possibilités :

- soit $F(x_0, y_0) = 0$, et alors tous les points de $\mathrm{diam}(\ell : m)$ appartiennent à $\mathcal{C}(\mathcal{E})$,
- soit $F(x_0, y_0) \neq 0$, et alors $\mathrm{diam}(\ell : m)$ ne rencontre pas $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

2. On suppose que $\ell : m$ n'est pas une direction asymptotique de $\mathcal{E}$.

– Soit D une droite dirigée par $\ell : m$. La direction $\ell : m$ n'étant pas asymptotique, l'équation du paramètre associée à $(D, \mathcal{E})$ est de degré deux. Le cas où cette équation admettrait une solution double étant trivial, on suppose que D coupe $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ en deux points distincts M_1 et M_2. Soit $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ le milieu de $[M_1 M_2]$. Les équations paramétrées de D peuvent s'écrire

$$\begin{cases} x = x_0 + t\ell \\ y = y_0 + tm \end{cases} \tag{16}$$

Soient t_1 et t_2 les valeurs du paramètre correspondant à M_1 et M_2, respectivement et α le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_0 M_1} = t_1 \alpha \\ \overrightarrow{M_0 M_2} = t_2 \alpha \end{cases}$$

d'où $t_1 + t_2 = 0$. D'un autre côté, on sait que t_1 et t_2 sont les racines de

$$at^2 + bt + c = 0$$

l'équation du paramètre associées à $((16), \mathcal{E})$, donc, d'après la formule de Viète

$$b = -\frac{(t_1 + t_2)}{a} = 0$$

ce qui d'après la proposition 72 signifie que $M_0 \in \mathrm{diam}(\ell : m)$.

– Réciproque. On suppose que $M_0 \in \mathrm{diam}(\ell : m)$ et que D, la droite dirigée par $\ell : m$ passant par M_0 coupe $\mathcal{C}$ en M_1 et M_2. Le système d'équations paramétrées de D s'écrit exactement comme (16). Soient t_1 et t_2 les valeurs du paramètre t correspondant au point M_1 et M_2, respectivement. Les nombres t_1 et t_2 sont les racines de $at^2 + bt + c = 0$, l'équation du paramètre associée à $((16), \mathcal{E})$, donc, d'après la formule de Viete, $t_1 + t_2 = -ab$. Mais $M_0 \in \mathrm{diam}(\ell : m)$ donc, d'après la proposition 72, $b = 0$, ce qui prouve que $t_1 + t_2 = 0$; autrement dit M_0 est le milieu de $[M_0 M_1]$. □

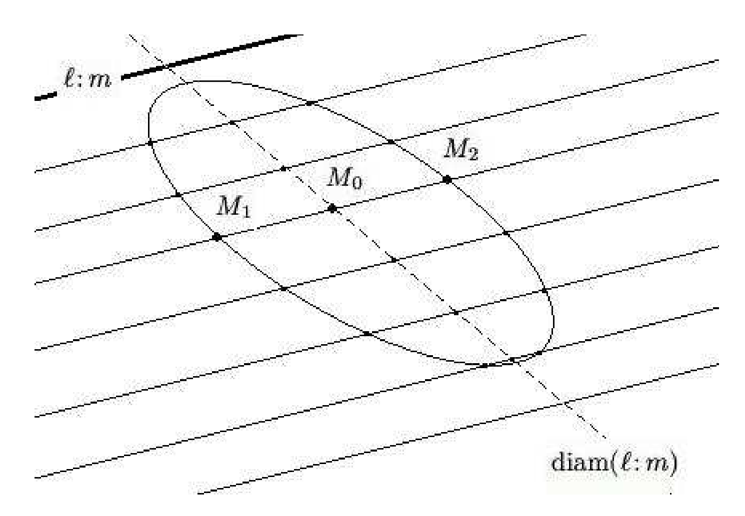


Figure 13. Cas d'une ellipse. Dans un certain repère l'équation est $x^2 + y^2 = 1$ et les directions asymptotiques sont $i : 1$ et $-i : 1$.

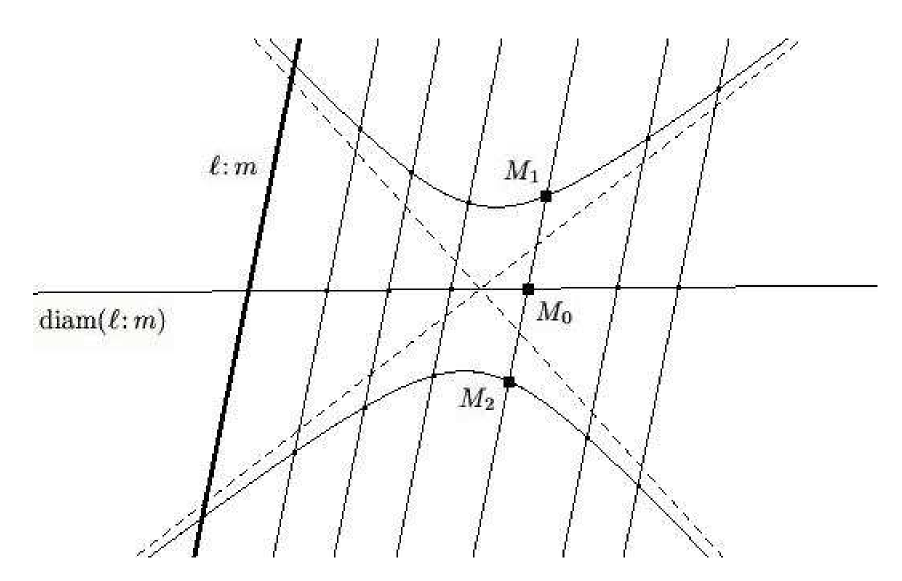


Figure 14. Cas d'une hyperbole. Dans un certain repère l'équation est $x^2 - y^2 = 1$ et les directions asymptotiques sont $1 : 1$ et $-1 : 1$. En pointillés les asymptotes ; ce sont le diamètre de $1 : 1$ et $-1 : 1$.

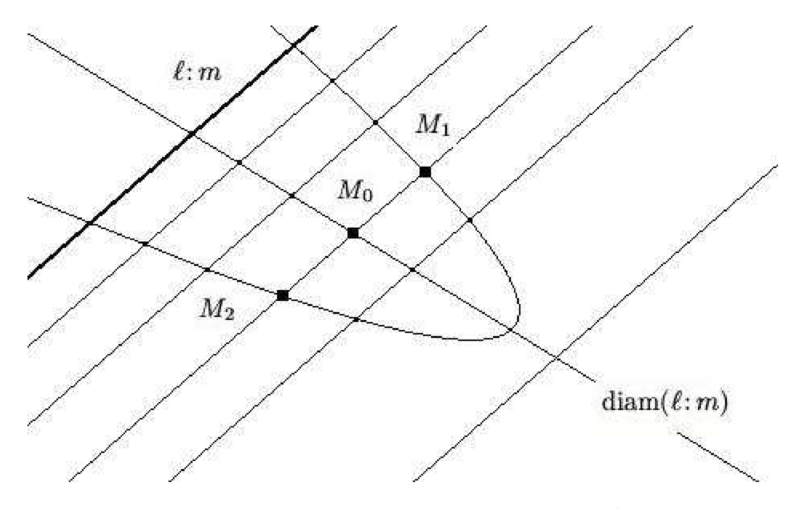


Figure 15. Cas d'une parabole. Dans un certain repère l'équation est $y^2 = 2x$ et la direction asymptotique (et singulière) est $1 : 0$.

Proposition 74.

1. *Tous les diamètres de $\mathcal{E}$ passent par ses éventuels centres.*
2. *Si $\mathcal{E}$ possède une pleine droite $\mathcal{D}_c$ de centres, alors pour toute direction régulière $\ell:m$ on a*

$$\mathrm{diam}(\ell:m)=\mathcal{D}_c$$

Démonstration.

1. On rappelle que les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ des (éventuels) centres de $\mathcal{E}$ sont les solutions de l'équation

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et qu'une équation de $\mathrm{diam}(\ell:m)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix}=0$$

qui équivaut à

$$\begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}=0$$

c'est à dire à

$$\begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix}\left[A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}\right]=0$$

d'où le résultat.

2. Supposons que $\mathcal{E}$ possède une pleine droite D_c de centres. D'après la proposition 12 il y a deux cas possibles.

   a) Soit $(a_{12},a_{22},a_{23})=k\,(a_{11},a_{12},a_{13})$ pour un certain $k\in\mathbb{K}$.

   b) Soit $(a_{11},a_{12},a_{13})=(0,0,0)$.

   Traitons le cas a). Dans ce cas, l'équation de D_c est

$$a_{11}\,x+a_{12}\,y+a_{13}=0$$

   Soit $\ell:m$ une direction régulière et calculons une équation de son diamètre.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix}\left[A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} \ell & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}x+a_{12}y+a_{13} \\ k\,(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}) \end{pmatrix} \\ &= (\ell+mk)\,(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})\end{aligned}$$

   or $\ell+mk\neq 0$ car $\ell:m$ est régulière, et donc une équation de $\mathrm{diam}(\ell:m)$ est

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$$

   mais cette équation est celle de D_c. Le cas b) se traite de la même manière. □

Exercice 8. Redémontrer toutes les propositions de cette annexe et de la précèdente en utilisant le théorème 42 (il s'agit de tout vérifier sur les équations I_0, I_1, II, III_0 et III_1).

13 Annexe C : structure réelle-complexe

Soit $\mathcal{C}$ la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$x^2+y^2=0$$

Chacun sait que cette courbe se réduit à un point

$$\mathcal{C}=\{(0,0)\}$$

Il est gênant de constater ici à quel point la géométrie de $\mathcal{C}$ se reflète mal dans son équation.

Pour palier à ce décalage entre aspect géométrique et algébrique, on étend chaque facteur de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, autrement dit, on regarde tous les $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $x^2 + y^2 = 0$. On trouve alors une courbe $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ constituée de deux droites complexes, les droites d'équation

$$y = \pm i x$$

ce qui est un peu plus satisfaisant. La courbe $\mathcal{C}$ apparaît maintenant comme la trace réelle (i.e. l'intersection avec le plan $\mathbb{R}^2$) de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$, et finalement il n'y a rien d'étonnant à ce qu'une courbe ne rencontre un plan qu'en un point. L'introduction des coordonnées complexes fait apparaître $\mathcal{C}$ comme la partie immergée d'un iceberg, un iceberg imaginaire ou aspect algébrique et géométrique sont harmonieusement liés.

Une autre situation mettant en valeur l'introduction de coordonnées complexes est l'étude des directions asymptotiques de l'hyperbole

$$x^2 - y^2 = 1$$

et de l'ellipse

$$x^2 + y^2 = 1$$

L'équation quadratique donnant les directions asymptotiques de l'hyperbole est

$$\ell^2 - m^2 = 1$$

et on trouve deux directions, $1{:}\,1$ et $1{:}-1$. L'équation pour l'ellipse est

$$\ell^2 + m^2 = 1$$

ce qui montre que l'ellipse n'a pas de directions asymptotiques, ce qui est gênant si on espère unifier les coniques. On introduit alors les coordonnées complexes, et on trouve deux directions asymptotiques, à savoir $1{:}\, i$ et $1{:} -i$. L'introduction de coordonnées complexes a permis encore une fois d'harmoniser les choses.

Notons qu'une fois introduites les coordonnées complexes, rien ne nous empêche de faire le changement de repère correspondant au changement

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = i y \end{cases}$$

L'équation de l'ellipse devient alors

$$x'^2 - y'^2 = 1$$

c'est à dire l'équation de l'hyperbole !

Ainsi, ces deux courbes réelles sont les traces d'une seule et même courbe de $\mathbb{C}^2$ prises sur deux plans différents de $\mathbb{C}^2$ et encore une fois, la partie *réelle* apparaît comme la partie immergé d'un iceberg *complexe*.

Dans ces deux exemples nous avons introduit des coordonnées complexes tout en gardant en tête la structure réelle de départ. C'est ce point de vue, ce double regard, qui est formalisé par les structures réelles-complexes.

Définition 75. *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et R un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de E. On dit que R est une structure réelle-complexe sur E si E en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel est la somme directe de R et iR :*

$$E = R \oplus i R$$

Un espace vectoriel réel-complexe est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une structure réelle-complexe.

Un tel espace est aussi appelé un $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$-espace. L'exemple par excellence est le corps $\mathbb{C}$ muni de son sous-corps $\mathbb{R}$.

Une manière simple de définir une structure réelle-complexe sur un espace E consiste à choisir une $\mathbb{C}$-base de E. On définit alors R comme le $\mathbb{R}$-sous espace vectoriel de E engendré par cette base.

Soit (E, R) un espace réel-complexe. Chaque élément u de E de décompose de façon unique en

$$u = a + ib$$

avec $a, b \in R$. On dit que a est la partie réelle de u, et b la partie imaginaire.

On dit aussi que R est la partie réelle de E. Les éléments de R sont appelés éléments réels et ceux de iR, éléments purement imaginaires. Un système de vecteurs de E est dit réel s'il est composé exclusivement d'éléments de R. On parlera donc de bases réelles, de familles réelles, de parties réelles, etc.

Exemple 76. Le produit cartésien $\mathbb{C}^n$, l'espace des suites complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'espace $\mathbb{C}^I$ des fonctions de I dans $\mathbb{C}$ héritent naturellement de la structure réelle-complexe de $\mathbb{C}$. Les éléments réels de ces espaces sont ceux que l'on appelle « réels » de manière intuitive, de façon usuelle.

Définition 77. *Un sous-espace réel-complexe de E est un $\mathbb{C}$-sous espace vectoriel L engendré par des éléments réels. Un tel sous-espace est naturellement muni d'une structure réelle-complexe puisqu'il est somme directe de $L \cap R$ et $i(L \cap R)$.*

Exemple 78. $\mathbb{C} \times \{0\}$ est un sous-espace réel-complexe de $\mathbb{C}^2$. Sa partie réelle est $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Il est facile de voir que L est un sous-espace réel-complexe de E si et seulement si L est définie par un système d'équations réelles (i.e. à coefficients réels).

Avertissement 79. Il apparaît ici une ambigüité : on pourrait croire qu'un sous-espace réel-complexe est une partie réelle alors qu'en fait elle contient des éléments non réels. Il n'y a qu'à regarder l'exemple précèdent pour s'en convaincre. On pourrait croire également qu'un $\mathbb{R}$-sous espace vectoriel de E est une partie réelle alors qu'elle aussi peut contenir des éléments non réels. C'est le cas par exemple de iR. C'est un $\mathbb{R}$-sous espace, mais ce n'est pas une partie réelle.

On définit la conjugaison comme la symétrie associée à la somme directe $E = R \oplus iR$. C'est un $\mathbb{R}$-automorphisme involutif de E :

$$\mathrm{conj} \ : \ \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ a + ib & \longmapsto & a - ib \end{array}$$

On notera que conjuguer un élément de E revient à conjuguer ses coordonnées exprimées dans une base réelle.

On en déduit qu'un élément de E est réel si ses coordonnées sont réelles dans une base réelle. On en déduit aussi que la matrice de passage d'une base réelle vers une autre base réelle est à coefficients réels (on dit alors que la matrice est réelle, tout simplement). Réciproquement : chaque fois que l'on transforme une base réelle avec une matrice réelle, on obtient une base réelle.

Soient maintenant (F, S) un autre espace réel-complexe et $f \colon E \to F$ une application $\mathbb{C}$-linéaire. On dit que f est réelle si l'image de chaque réel de E est un réel de F. Ceci équivaut à dire que la matrice de f écrite dans des bases réelles de E et F est réelle.

Les espaces réels-complexes apparaissent naturellement comme l'extension obtenue en passant des scalaires réels aux scalaires complexes. Formalisons cette idée.

Définition 80. *Soient R un espace vectoriel réel, C un espace vectoriel complexe et $j\colon R \to C$ une application $\mathbb{R}$-linéaire injective. On dit que (C, j) est une complexification de R si $j(R)$ est une structure réelle-complexe de C.*

En dimension finie cela équivaut à dire que la dimension (réelle) de R est égale à la dimension complexe de C.

Proposition 81. *Tout espace vectoriel réel possède une complexification. Elle est unique à isomorphisme réelle-complexe près.*

Démonstration. Soit R un espace vectoriel réel. On pose $C = R \times R$ et on définit $j\colon R \to C$ comme l'injection canonique $r \mapsto (r,\ 0)$ dans le premier facteur. Cet espace est naturellement muni d'une structure réelle faisant de j un $\mathbb{R}$-monomorphiqme. Pour avoir une structure complexe sur C il suffit de définir une loi externe

$$\mathbb{R} \times C \longrightarrow C$$

ce que l'on fait en posant

$$\begin{cases} i(r,0) = (0,r) \\ i(0,r) = (-r,0) \end{cases}$$

ou si le lecteur préfère :

$$(\lambda + i\mu)(a,b) = (\lambda a - \mu b, \mu a + \lambda b)$$

Il est par ailleurs facile de voir que C est somme directe de $j(R)$ et $i.j(R)$.

Il y a unicité dans le sens suivant : si $(C',\ j')$ est une autre complexification de R, alors il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels réels-complexe $\varphi\colon C \to C'$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{j'} & C' \\ j\downarrow & \nearrow\varphi & \\ C & & \end{array}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier ce résultat. □

Dans la pratique on identifie R avec son image $j(R)$ dans C.

On notera que toute application $\mathbb{R}$-linéaire $f\colon R \to R'$, s'étend de manière unique en une application réelle $f_{\mathbb{C}}\colon C \to C'$, où C et C' sont les complexifications de R et R', respectivement. On dit que $f_{\mathbb{C}}$ est la complexification de f. Si a et b sont des $\mathbb{R}$-bases de R et R', respectivement, alors a et b sont des $\mathbb{C}$-bases réelles de C et C', respectivement, et la matrice de f dans les bases a, b coïncide avec celle de $f_{\mathbb{C}}$ dans les bases a, b.

La situation réelle-complexe la plus fréquente est celle d'un espace réel-complexe (C, R) muni d'une base $(a, e_1, \bar{e_2}, \ldots, e_n, \bar{e_n})$ où a est réel et pour chaque k, $\bar{e_k}$ désigne le conjugué de e_k. Il est facile alors de voir que la famille $(a, c_1, s_1, \ldots, c_n, s_n)$ où

$$c_k = \frac{e_k + \bar{e_k}}{2}$$

et

$$s_k = \frac{e_k - \bar{e_k}}{2i}$$

est alors une base réelle de $(C,\ R)$. Cette situation est rencontré dans la résolution d'équations différentielles et dans la théorie de Fourier, par exemple.

Terminons avec la notion de structure réelle-complexe affine :

Définition 82. *Un espace affine réel-complexe est un espace affine complexe $\mathcal{A}$ dans lequel on fixe un sous-ensemble* Re$\mathcal{A}$ *(l'ensemble des points réels) appelé partie réelle de $\mathcal{A}$ et où*

1. *$\vec{\mathcal{A}}$ est un espace vectoriel réel-complexe,*

2. A et B sont des points réels $\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ *est un vecteur réel,*

3. A et $\overrightarrow{AB}$ *sont réels* $\Rightarrow B$ *est réel.*

Il est clair que $\mathrm{Re}\mathcal{A}$ est un espace affine réel, d'espace vectoriel associé $\mathrm{Re}\vec{\mathcal{A}}$, et qu'en dimension finie on a $\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Re}\mathcal{A} = \dim_{\mathbb{C}}\mathcal{A}$.

Définition 83. *Un repère réel est un repère dont l'origine et les vecteurs sont réels.*

On notera qu'un point est réel si et seulement si ses coordonnées dans un repère réel sont réelles. On définit la *conjugaison complexe*

$$\mathrm{conj}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

grâce à la conjugaison des coordonnées dans un repère réel (le résultat ne dépend pas du repère réel choisi). On définit la complexification des espaces affines réels de manière assez naturelle...

14 Annexe D : structure euclidienne réelle-complexe

Que gagnons-nous en complexifiant un espace euclidien ? Lorsque $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ possède une structure euclidienne on peut définir une forme bilinéaire symétrique sur $\overrightarrow{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$ en étendant naturellement le produit scalaire de $\overrightarrow{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}}$. Ainsi pour tout $x, y \in \overrightarrow{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$, on pose

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

où (x_i) et (y_i) sont les coordonnées de x et y, respectivement, dans une base réelle orthonormée (orthonormée dans l'espace réel, bien entendu). Cette forme est à valeurs complexes et elle ne dépends pas du choix de la base orthonormée réelle. Il est clair que cette forme n'est pas *définie positive* et ne modélise en rien la notion *intuitive* d'orthogonalité.[3] En effet, pour cette forme certains vecteurs non nuls sont orthogonaux à eux-mêmes. C'est le cas du vecteur de coordonnées $(1, i, 0, ..., 0)$, par exemple.

Définition 84. *Un espace réel-complexe euclidien est un espace réel-complexe affine dont la partie réelle est un espace euclidien.*

L'intérêt des espaces réels-complexes euclidiens est d'une part la structure euclidienne existant dans la partie réelle et d'autre part la possibilité de pouvoir considérer des coordonnées complexes : ceci permet comme cela a été montré à l'annexe précèdente d'harmoniser certains résultats. En fait, le produit « scalaire » des vecteurs non réels ne nous sera d'aucune utilité.

Exemple 85. L'ensemble $\mathbb{C}^2$ est un espace réel-complexe euclidien. On remarquera que $u = (1, i)$ est *orthogonal* à lui même : $\langle u, u\rangle = 0$. On dit alors que la *norme complexe* de u est nulle !

Exercice 9. Trouver une manière diffèrente d'étendre la formule $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$ à tous les vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$ de sorte que la forme obtenue soit définie positive (elle définira alors une norme au sens classique). On cherchera du côté des formes *sesquilinéaire*, voir [4]...

Un vecteur u tel que $\langle u, u\rangle = 0$ est appelé *vecteur isotrope*. Si u est isotrope alors tout vecteurs colinéaire à u l'est également. On peut donc parler de directions isotropes. Cherchons les directions isotropes d'un espace bidimensionnel. Fixons un repère réel orthonormé. Un vecteur $u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est isotrope si et seument si $x^2 + y^2 = 0$, c'est à dire si et seulement si $y = \pm\, i x$. On trouve donc deux directions isotropes, les droites vectorielles $y = i x$ et $y = -\, i x$. On notera que ces deux droites possèdent les mêmes équations dans tout autre repère réel orthonormé.

3. Pour étendre cette notion aux vecteurs complexes on se servira plutôt d'une forme hermitienne définie positive, voir [4].

15 Annexe E : plans projectifs

15.1 Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$. On note $D(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E,

$$D(E)=\{\mathbb{K}a\ ;\ a\in E\backslash\{0\}\}$$

On peut voir $D(E)$ comme l'ensemble $E\backslash\{0\}$ quotienté par la relation de colinéarité. C'est pour cela que nous dirons d'un élément a de E qu'il représente l'élément $\mathbb{K}a$ de $D_0(E)$.

Définition 86. *L'espace projectif défini par l'espace vectoriel E est l'ensemble $D(E)$ des droites vectorielles de E. Si E est de dimension n on dit que $D(E)$ est de dimension $n-1$. Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ on dit que $D(E)$ est un espace projectif sur $\mathbb{K}$.*

Le cas qui nous intéresse est celui où E est de dimension 3 ; on dit alors que $D(E)$ est un plan projectif.

Si $\mathcal{A}$ est un espace affine sur $\mathbb{K}$, on note $D_0(\mathcal{A})$ l'espace projectif défini par l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{A}}$.

Notation 87. *On note $\mathbb{K}P^{n-1}$ l'espace projectif défini par $\mathbb{K}^n$:*

$$\mathbb{K}P^{n-1}=D(\mathbb{K}^n)$$

Si $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}$, on note $(x_1:\dots:x_n)$ l'élément qu'il représente dans $\mathbb{K}P^{n-1}$.

15.2 Un autre modèle

Fixer un point O dans l'espace affine $\mathcal{A}$ permet d'identifier $D_0(\mathcal{A})$ à l'ensemble des droites de $\mathcal{A}$ passant par O. Ce changement de modèle est souvent pratique.

15.3 Coordonnées homogènes

On suppose ici que $\mathcal{A}$ est de dimension 3. Fixons une base (i,j,k) de $\vec{\mathcal{A}}$. Cette base permet de repérer les éléments du plan projectif $D_0(\mathcal{A})$. En effet, si d est la droite dirigée par le vecteur $a=xi+yj+zk$, on lui associe les coordonnées homogènes $(x:y:z)$. On dit que l'application

$$D_0(\mathcal{A})\longrightarrow\mathbb{K}P^2$$

ainsi définie est un système de coordonnées homogènes sur $D_0(\mathcal{A})$.

L'usage ici est de noter $(X:Y:Z)$ le système de coordonnées homogènes associé à un système (x,y,z) de coordonnées sur $\mathcal{A}$.

Effectuer un changement de base sur $\vec{\mathcal{A}}$ induit un changement de coordonnées sur $D_0(\mathcal{A})$. Supposons par exemple que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des bases de $\vec{\mathcal{A}}$. La formule de changement de coordonnées sur $\vec{\mathcal{A}}$ est alors

$$\operatorname*{mat}_{\mathfrak{a}} u=\operatorname*{mat}_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}\operatorname*{mat}_{\mathfrak{b}} u$$

et si on note

$$\operatorname*{mat}_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}=(c_{ij})$$

ceci se traduit par

$$\begin{cases} X'=c_{11}X+c_{12}Y+c_{11}Z\\ Y'=c_{21}X+c_{22}Y+c_{23}Z\\ Z'=c_{31}X+c_{32}Y+c_{33}Z\end{cases}$$

sur les coordonnées homogènes. Réciproquement, tout changement de ce type sur $(X:Y:Z)$ effectué avec une matrice (c_{ij}) inversible correspond à un changement de coordonnées sur $D_0(\mathcal{A})$ induit par un changement de coordonnées sur $\mathcal{A}$ ou $\vec{\mathcal{A}}$.

15.4 Structure affine

Fixons dans $\mathcal{A}$ un plan $\mathcal{P}$ et un point O hors de $\mathcal{P}$. Identifions $D_0(\mathcal{A})$ à l'ensemble des droites de $\mathcal{A}$ passant par O. Chaque droite D passant par O et non parallèle à $\mathcal{P}$ détermine, par intersection avec $\mathcal{P}$, un point M. Ce procédé définit ainsi une correspondance bi-univoque entre les droites de $\mathcal{A}$ passant par O non parallèles à $\mathcal{P}$ et les points du plan $\mathcal{P}$. Par ailleurs, il existe une correspondance bi-univoque naturelle entre les droites passant par O et parallèles à $\mathcal{P}$, et les directions de $\mathcal{P}$. Ces deux bijections nous permettent d'identifier $D_0(\mathcal{A})$ à l'ensemble $\mathcal{P} \cup D_0(\mathcal{P})$ (où l'union est disjointe).

$$D_0(\mathcal{A}) = \mathcal{P} \cup D_0(\mathcal{P}) \tag{17}$$

Si $\mathcal{A} = \mathbb{K}^3$ cette identification s'écrit

$$\mathbb{K}\mathrm{P}^2 = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{K}\mathrm{P}^1$$

où $\mathbb{K}^2$ désigne le plan $\mathbb{K}^2 \times \{1\}$ de $\mathbb{K}^3$.

Cette façon de voir $D_0(\mathcal{A})$ fournit une description géométrique du plan projectif. L'identité (17) présente le plan projectif comme un plan affine $\mathcal{P}$ auquel on aurait « ajouté » des éléments *idéaux* (les directions de $\mathcal{P}$). Ces éléments idéaux sont comme des points situés à l'infini (à l'infini par rapport à quelqu'un qui vit dans $\mathcal{P}$). Montrons pourquoi.

Soient $\mathcal{Q}$ le plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par O, et O' un point de $\mathcal{P}$. Fixons une droite (Ot) dans $\mathcal{Q}$. cette droite correspond naturellement à une droite $(O't')$ de $\mathcal{P}$, voir figure ci-dessous. Si un point M parcourt $[O't')$, la droite (OM) glisse le long d'un plan. Si on laisse cette droite glisser ainsi, elle finit par atteindre la droite (Ot). Pendant ce temps le point M, qui est ne l'oublions pas, l'alter ego de (OM) via l'identification (17), fle de plus en plus vite et de plus en plus loin le long de $[O't')$, et on peut se demander ce qu'il est devenu lorsque (OM) a atteint sa position finale ! Si on ne considère que le plan $\mathcal{P}$, on est forcé de dire que M a disparu. En revanche si on considère $D_0(\mathcal{A})$ et l'identification (17), on peut dire qu'il a atteint un point à l'infini, à savoir le point correspondant à la direction $(O't')$, ou ce qui revient au même, (Ot).

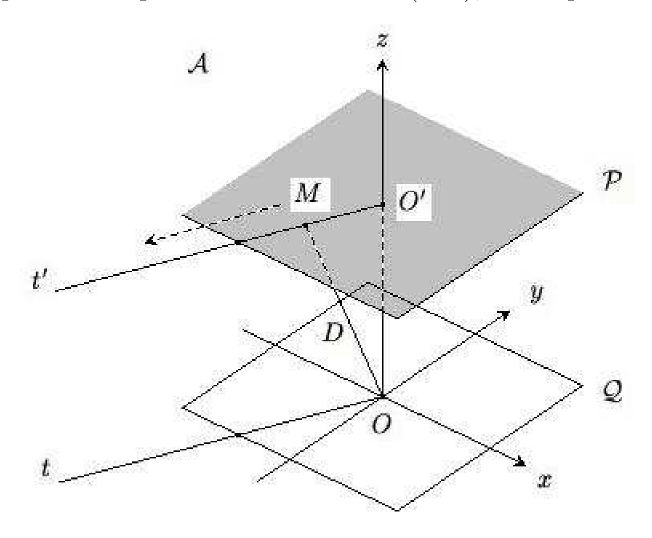


Figure 16. Pendant que M parcourt $[O't')$, la droite (OM) glisse le long d'un plan. Lorsque (OM) atteint (Ot), le point M explose à l'infini. L'identification (17) nous dit que M « devient » $(O't')$. Ajoutons que puisque la trajectoire parcourue par M est une droite, on dit que la trajectoire parcourue par (OM) est une droite projective de $D_0(\mathcal{A})$, voir section 15.7.

Définition 88. *Un plan projectif affine est un triplet*

$$\mathfrak{P} = (D_0(\mathcal{A}), \mathcal{P}, O)$$

où $\mathcal{A}$ est un espace affine de dimension 3, $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{A}$ et O un point de $\mathcal{A}$ hors de $\mathcal{P}$. On identifie canoniquement un tel ensemble à l'ensemble $\mathcal{P} \cup D_0(\mathcal{P})$, et on dit que $\mathcal{P}$ est le plan affine canonique associé à $\mathfrak{P}$. Les points de $\mathcal{P}$ sont appelés points ordinaires. Les points de $D_0(\mathcal{P})$ sont appelés points idéaux ou points à l'infini.

Tout plan projectif peut être muni d'une telle structure. Bien sûr le choix d'une telle structure n'est pas unique.

15.5 Projectivisation du plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine. Si on plonge $\mathcal{P}$ dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3 (autrement dit si on identifie $\mathcal{P}$ à un plan de $\mathcal{A}$), et si on choisit un point $O \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{P}$, alors la plan $\mathcal{P}$ devient la partie affine de $(D_0(\mathcal{A}), \mathcal{P}, O)$. Remplacer $\mathcal{P}$ par ce plan projectif revient à ajouter des points idéaux au plan $\mathcal{P}$. On dit que $(D_0(\mathcal{A}), \mathcal{P}, O)$ est la projectivisation de $\mathcal{P}$. On note $\mathrm{Proj}(\mathcal{P})$ ce plan projectif affine. On retiendra que projectiviser $\mathcal{P}$ revient à ajouter aux points de $\mathcal{P}$ les directions de $\mathcal{P}$:

$$\mathrm{Proj}(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \cup D_0(\mathcal{P})$$

Signalons que lorsque l'on projectivise un plan euclidien, on récupère un « plan projectif affine euclidien ». Sa partie affine est muni d'une structure euclidienne.

15.6 Coordonnées homogènes canoniques

Définition 89. *Soient $\mathfrak{P} = (D_0(\mathcal{A}), \mathcal{P}, O)$ un plan projectif affine et $(X\colon Y\colon Z)$ un système de coordonnées homogènes sur $\mathfrak{P}$. On dit que le système $(X\colon Y\colon Z)$ est canonique si l'équation de $\mathcal{P}$ dans le repère (x, y, z) correspondant est*

$$z = 1$$

Autrement dit, si (O, e_1, e_2, e_3) est un repère de $\mathcal{A}$ donnant le système $(X\colon Y\colon Z)$ sur $\mathfrak{P}$, alors

- $\mathrm{vect}\left\langle e_1, e_2 \right\rangle = \vec{\mathcal{P}}$
- $O + e_3 \in \mathcal{P}$

Ainsi pour construire un système canonique il suffit de se donner deux vecteurs e_1, e_2 linéairement indépendants portant la direction de $\mathcal{P}$, de choisir un point O' sur $\mathcal{P}$, et de poser $e_3 = \overrightarrow{OO'}$. Le système associé au repère (O, e_1, e_2, e_3) ainsi obtenu est alors canonique.

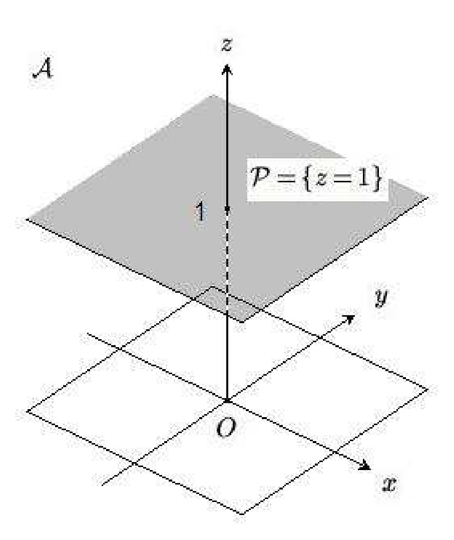


Figure 17. On lit (x, y) sur le plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par O et on lit z grâce à un vecteur partant de O pour aller sur $\mathcal{P}$. Le système $X\colon Y\colon Z$ est alors canonique.

Nous allons comprendre l'intérêt d'un tel système. Soit $D \in \mathfrak{P}$. Notons $(x\colon y\colon z)$ les coordonnées de D. On munit $\mathcal{P}$ du repère $(O',\, e_1,\, e_2)$ bien entendu. L'élément D correspond à une droite de $\mathcal{A}$ passant par O et on distingue deux cas :

1. $z \neq 0$. Alors quitte à diviser x, y et z par z, on peut supposer que les coordonnées de D sont $(x\colon y\colon 1)$. La droite D coupe alors $\mathcal{P}$ en le point de coordonnées $(x,\, y,\, 1)$ dans le repère de $\mathcal{A}$ et (x, y) dans le repère de $\mathcal{P}$. Ainsi $D(x\colon y\colon 1)$ est le point ordinaire s'identifiant au point (x, y) de $\mathcal{P}$.
2. $z = 0$. Dans ce cas la droite D ne coupe pas $\mathcal{P}$ et D est un point idéal. C'est le point qui s'identifie à la direction $\mathbb{K}(x e_1 + y e_2)$. Cette direction se note $x\colon y$ dans le repère de $\mathcal{P}$.

Résumons : Avec un système $(X\colon Y\colon Z)$ de coordonnées canonique, chaque point $(x\colon y\colon 1)$ est un point ordinaire, il s'identifie au point (x, y) de $\mathcal{P}$, et chaque point $(x\colon y\colon 0)$ est un point à l'infini, ils s'identifie avec la direction $x\colon y$ de $\mathcal{P}$.

$$(x\colon y\colon z) \longmapsto \begin{cases} (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) \text{ si } z \neq 0 \\ (x\colon y) \text{ sinon} \end{cases}$$

Supposons que l'on souhaite projectiviser un plan $\mathcal{P}$ déjà muni d'un repère (O', e_1, e_2), c'est à dire muni d'un système de coordonnées affines $(x,\, y)$. Le mieux est de faire comme si $\mathcal{P}$ était plongé dans un espace affine $\mathcal{A}$, dont la direction est déjà munie d'une base (e_1, e_2, e_3), de choisir le point $O = O' - e_3$ et de munir $\mathcal{A}$ du repère $(O,\, e_1,\, e_2,\, e_3)$. Dans ces conditions le système de coordonnées homogènes de $\mathrm{Proj}(\mathcal{P})$ associé à $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ est canonique, les points $(x,\, y)$ de $\mathcal{P}$ deviennent les points $(x\colon y\colon 1)$, et les directions $x\colon y$ de $\mathcal{P}$ deviennent les point $(x\colon y\colon 0)$. Ceci décrit la projectivisation comme une démarche purement analytique consistant à remplacer des coordonnées (x, y) par des coordonées $(X\colon Y\colon Z)$ tout en respectant certaines règles.

Passer d'un système canonique à un autre système canonique revient à faire un changement de base dans $\vec{\mathcal{A}}$ respectant les règles suivantes :

- e'_1 et e'_2 doivent être sur le plan vectoriel engendré par e_1 et e_2, c'est à dire $\vec{\mathcal{P}}$.
- e'_3 relie l'origine O à un point qui appartient à $\mathcal{P}$. Autrement dit : $e'_3 - e_3$ doit être dans le plan $\mathrm{vect}\left\langle e_1, e_2 \right\rangle$, c'est à dire $\vec{\mathcal{P}}$.

Par conséquent la matrice de (e_1, e_2, e_3) vers (e'_1, e'_2, e'_3) doit être de la forme

$$\operatorname*{mat}_{e} e' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

On notera que cette matrice est inversible si et seulement si $b_{11}\, b_{22} - b_{21}\, b_{12} \neq 0$. Les rôles de e et e' étant symétriques, la matrice de $(e'_1,\, e'_2,\, e'_3)$ vers $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ aura la même forme. Le lecteur peut à titre d'exercice essayer de montrer cela d'une autre manière : en vérifiant que l'inverse de la matrice (18) possède la même allure. Les nouvelles coordonnées homogènes sont donc liées aux anciennes par

$$\begin{cases} X' = c_{11}\, X + c_{12}\, Y + c_{13}\, Z \\ Y' = c_{21}\, X + c_{22}\, Y + c_{23}\, Z \\ Z' = Z \end{cases}$$

où (c_{ij}) désigne la matrice inverse de (b_{ij}).

Réciproquement, tout changement de ce type écrit avec une matrice (c_{ij}) vérifiant $c_{11}\, c_{22} - c_{21}\, c_{12} \neq 0$ correspond à un changement de coordonnées canoniques.

On notera que pour les points ordinaires ceci correspond au changement

$$\begin{cases} x' = c_{11}\, x + c_{12}\, y + c_{13} \\ y' = c_{21}\, x + c_{22}\, y + c_{23} \end{cases}$$

15.7 Droites projectives

Ici $\mathfrak{P} = D_0(\mathcal{A})$ est un plan projectif. Tout plan vectoriel $\vec{\pi}$ de $\vec{\mathcal{A}}$ détermine naturellement une partie de $\mathfrak{P}$: l'ensemble des droites vectorielles contenues dans $\vec{\pi}$. Ce sous-ensemble de $\mathfrak{P}$ est par définition la *droite projective définie par* $\vec{\pi}$, voir figure 18.

Fixons un repère dans $\mathcal{A}$ et notons (x, y, z) les coordonnées dans ce repère. Soit $\mathfrak{D}$ la droite projective définie par un plan vectoriel $\vec{\pi}$ d'équation

$$ax + by + cz = 0$$

Soit D un élément de $\mathfrak{D}$ et notons $(x\colon y\colon z)$ ses coordonnées homogènes. Les nombres (x, y, z) sont par définition les coordonnées d'un vecteur directeur de D et ce vecteur appartient à $\vec{\pi}$, donc

$$ax + by + cz = 0 \tag{19}$$

Réciproquement, si les coordonnées $(x\colon y\colon z)$ d'un point du plan projectif vérifient (19) alors ce point est sur la droite projective $\mathfrak{D}$. Par conséquent,

$$\mathfrak{D} = \{D(X\colon Y\colon Z)\,;\, aX + bY + cZ = 0\}$$

et $\mathfrak{D}$ est définie par une équation linéaire homogène en X, Y et Z :

$$aX + bY + cZ = 0$$

Notons que si (X, Y, Z) vérifie cette équation, alors tous les représentants de $(X\colon Y\colon Z)$ vérifient aussi cette équation (ceci est dû à l'homogénéité).

D'un autre côté il est facile de voir que toute équation linéaire homogène en X, Y et Z du type (19) définit une droite projective.

Dans ce qui suit $\mathfrak{D}$ désigne la droite projective définie par $\vec{\pi}$. Fixons maintenant un point O dans $\mathcal{A}$ et identifions le plan projectif $D_0(\mathcal{A})$ à l'ensemble des droites de $\mathcal{A}$ passant par O. Soit π le plan de $\mathcal{A}$ de direction $\vec{\pi}$ passant par O. Alors on remarque que la droite projective $\mathfrak{D}$ est l'ensemble des droites de $\mathcal{A}$ passant par O qui sont contenues dans π. Ceci fournit une autre manière de définir les droites projectives : dans le modèle 15.2, chaque plan passant par l'origine définit une droite projective.

15.8 Droites projectives dans un plan projectif affine

Soit $\mathfrak{P} = (D_0(\mathcal{A}), \mathcal{P}, O)$ un plan projectif affine.

Proposition 90. *L'ensemble $D_0(\mathcal{P})$ est une droite projective de $\mathfrak{P}$. On l'appelle droite des points à l'infini.*

Démonstration. Si on regarde $D_0(\mathcal{P})$ comme l'ensemble des droites de $\mathcal{A}$ passant par O et parallèles à $\mathcal{P}$, il apparaît clairement que $D_0(\mathcal{P})$ est la droite projective définie par $\vec{\mathcal{P}}$. □

Remarquons que dans un système de coordonnées homogènes canonique, $D_0(\mathcal{P})$ a pour équation

$$Z = 0$$

Proposition 91. *Toute droite projective de $\mathfrak{P}$ différente de la droite des points à l'infini est de la forme $d \cup \{\vec{d}\,\}$ où d est une droite de $\mathcal{P}$ et $\vec{d}$ la direction de d.*

Autrement dit, une droite projective autre que $D_0(\mathcal{P})$ est une droite affine de $\mathcal{P}$ à laquelle on ajoute le point à l'infini correspondant à sa propre direction. Ainsi, toute droite projective différente de la droite des points à l'infini est la projectivisation d'une droite affine.

Démonstration. Nous donnerons deux démonstrations.

1. Démonstration géométrique. Tout d'abord nous remarquons que si $\mathfrak{D}$ est une droite projective définie par un plan π, alors la partie affine de $\mathfrak{D}$ s'identifie à $\pi \cap \mathcal{P}$ via l'identification

$$\mathfrak{P} = \mathcal{P} \cup D_0(\mathcal{P}) \tag{20}$$

Soit $\mathfrak{D}$ une droite projective différente de $D_0(\mathcal{P})$ définie par un plan π. Alors π n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$, et $\pi \cap \mathcal{P}$ est une droite que nous notons d. La partie affine de $\mathfrak{D}$ est donc la droite affine d. La partie idéale de $\mathfrak{D}$ se compose des éléments de $D_0(\mathcal{A})$ contenus dans π et parallèles à $\mathcal{P}$. Il n'y a qu'une telle droite, et elle est parallèle à d. En tant qu'élément de $D_0(\mathcal{A})$ elle s'identifie à $\vec{d}$ via (20). D'où le résultat.

2. Démonstration analytique. Soit $\mathfrak{D}$ une droite projective différente de $D_0(\mathcal{P})$. Soit

$$aX + bY + cZ = 0$$

une équation de $\mathfrak{D}$ dans un système canonique. Etant donné que $\mathfrak{D} \neq D_0(\mathcal{P})$, on a forcément $(a, b) \neq (0, 0)$. Les points ordinaires de $\mathfrak{D}$ sont les points de coordonnées $(X\colon Y\colon 1)$ tels que $aX + bY + c = 0$. Via l'identification (20), ces points forment la droite affine d d'équation

$$ax + by + c = 0$$

dans le repère de $\mathcal{P}$. Les points à l'infini de $\mathfrak{D}$ sont les points de coordonnées $(X\colon Y\colon 0)$ tels que

$$aX + bY = 0$$

Il n'y en a qu'un, à savoir $(-b\colon a\colon 0)$. D'ailleurs ce point s'identifie à la direction $-b\colon a$ de $\mathcal{P}$, c'est à dire à $\vec{d}$, d'où le résultat. □

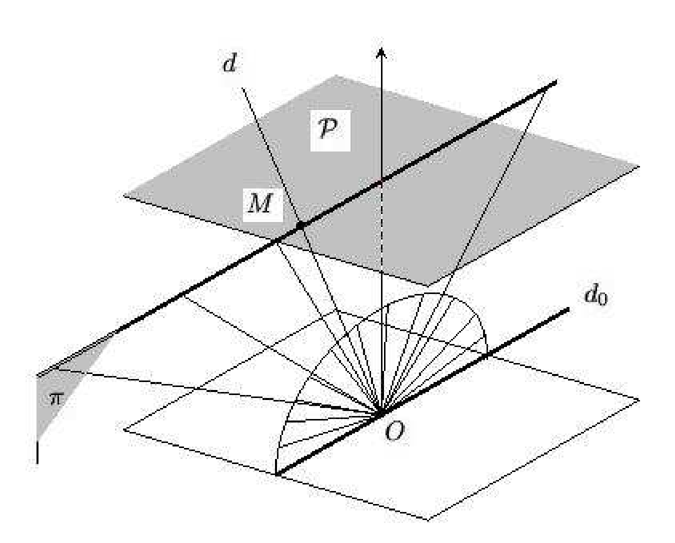


Figure 18. Cet éventail de droites portées par le plan π définit une droite projective. On peut voir en gras sa trace sur $\mathcal{P}$. Son point à l'infini est d_0.

Proposition 92. *Deux droites projectives de $\mathfrak{P}$ sont toujours sécantes. Autrement dit, si $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ sont des droites projectives distinctes, alors $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ se coupent en un et un seul point.*

Plus précisément : si les parties affines de deux droites projectives sont parallèles alors elles se rencontrent en un point à l'infini (ce point corresponds à leur direction commune). Si au contraire elles sont sécantes, alors elles n'ont pas la même direction, et les deux droites projectives ne se coupent qu'en un point ordinaire.

Démonstration. Soient $\mathfrak{D}_1$ et $\mathfrak{D}_2$ deux droites distinctes de $\mathfrak{P}$.

- *1er cas.* $\mathfrak{D}_1$ et $\mathfrak{D}_2$ sont différentes de $D_0(\mathcal{P})$. Alors modulo l'identification (20) on a $\mathfrak{D}_1 = d_1 \cup \{\vec{d_1}\}$ et $\mathfrak{D}_2 = d_2 \cup \{\vec{d_2}\}$. Si d_1 et d_2 sont parallèles, alors $\vec{d_1} = \vec{d_2}$ et $\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2 = \{\vec{d_1}\}$. Si au contraire d_1 et d_2 sont sécantes en un point M, alors $\vec{d_1} \neq \vec{d_2}$ et $\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2 = \{M\}$.
- *2me cas.* $\mathfrak{D}_1 = \mathcal{D}_0(\mathcal{P})$ et $\mathfrak{D}_2 = d \cup \{\vec{d}\,\}$. Dans ce cas il est clair que $\mathfrak{D}_1$ et $\mathfrak{D}_2$ ne se rencontrent pas dans la partie affine et $\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2 = \{\vec{d}\,\}$. □

15.9 Equations homogènes et courbes projectives

Ici $\mathfrak{P}$ désigne un plan projectif. On rappelle qu'un polynome homogène de degré m en X, Y et Z est un polynome $P(X,Y,Z)$ du type

$$P(X,Y,Z) = \sum_{(i,j,k)\,;\,i+j+k=m} a_{i,j,k} X^i Y^j Z^k$$

On note que tous les monomes de P sont de même degré m. Notons H_m l'ensemble des polynomes de $\mathbb{K}[X,Y,Z]$ homogènes de degré m. On appelle *équation algébrique homogène de degré* m toute équation de la forme $P(X,\ Y,\ Z) = 0$ avec $P \in H_m$. En géométrie projective les polynomes homogènes sont d'un grand intérêt comme le montre la proposition ci-dessous.

Proposition 93. *Le polynome $P(X,\ Y,\ Z)$ est homogène de degré m si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{K}$,*

$$P(kX, kY, kZ) = k^m P(X,Y,Z)$$

Ainsi, une fois fixé un système de coordonnées homogènes, toute équation homogène définit naturellement une partie $\mathcal{C}$ du plan projectif. Une telle partie de $\mathfrak{P}$ est appelé *courbe* (ou *courbe projective*).

$$\mathcal{C} = \{M(X{:}Y{:}Z) \in \mathfrak{P}\ ;\ P(X,Y,Z) = 0\}$$

Exemple 94. Les droites projectives sont des courbes projectives de degré 1.

Edité avec $\mathrm{T_EX_{MACS}}$

Bibliographie

[1] Jean de Biasi. *Mathématiques pour le CAPES et l'agrégation interne, troisième édition*. Éllipses, 2004.

[2] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, and S.P. Novikov. *Géométrie contemporaine, méthodes et applications, tome 1*. Édition MIR, Moscou, 1979.

[3] Richard Gomez. *Formes quadratiques*. À paraître, 2011.

[4] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire, 2e édition*. Cépaduès editions, 2002.

[5] Xavier Hubaut. Théorèmes belges. *Site Web Mathématique du secondaire*, 2007. http://xavier.hubaut.info/coursmath.

[6] Mikhail Postnikov. *Lectures in geometry, vol 1. Analytic geometry*. URSS publishers Moscow, Nauka, 1979.